



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MĚŘENÍ OVALITY EXTRUDOVANÉHO VLÁKNA

EXTRUDED FIBERS OVALITY MEASUREMENT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Pavel Loučka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Pavel Loučka**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Měření ovality extrudovaného vlákna

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Důležitým sledovaným parametrem při výrobě extrudovaného vlákna je jeho průměr. Měření této veličiny lze provést za předpokladu kruhovitosti jeho průřezu pomocí jedné snímací kamery. V praxi se ukázalo, že dalším důležitým parametrem je také ovalita, tedy jak moc je vlákno sploštělé. Budeme tedy předpokládat obecnější tvar průřezu vlákna a to ve tvaru elipsy. K určení ovality již potřebujeme alespoň tři různé pohledy na měřené vlákno.

Cíle bakalářské práce:

1. Popsat problematiku měření ovality.
2. Nastudovat potřebný matematický aparát.
3. Vytvořit jednoúčelou aplikaci umožňující odhadnout ovalitu extrudovaného vlákna.

Seznam doporučené literatury:

JANYŠKA, Josef a Anna SEKANINOVÁ. Analytická teorie kuželoseček a kvadratik. vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2604-9.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Důležitým sledovaným parametrem při výrobě extrudovaného vlákna je jeho průměr. Měření této veličiny lze provést za předpokladu kruhovitosti jeho průřezu pomocí jedné snímací kamery. V praxi se ukázalo, že dalším důležitým parametrem je také ovalita, tedy jak moc je vlákno zploštělé. V tomto textu se tak bude předpokládat obecnější tvar průřezu vlákna a to ve tvaru elipsy. K určení ovality je potom zapotřebí již alespoň tří různých pohledů na zkoumané vlákno. Práce se zabývá zejména analytickým popisem měření ovality vlákna, konkrétně pomocí dvou rozdílných přístupů založených na principech lineární algebry a projektivní geometrie. Z tohoto důvodu je velká část práce věnována právě těmto odvětvím matematiky, zvláště se pak zaměřuje na analytickou teorii kuželoseček. Kromě toho práce obsahuje i krátkou zmínku o technickém provedení měření ovality a jeho možných úskalích.

Abstract

One of the important parameters observed during extruded fibre fabrication is its diameter. The diameter can be measured with a single scanning camera assuming that the fibre section has a circular shape. As proved in practice, another important parameter is ovality, that is the rate of fibre flattening. This paper assumes that the fibre section shape is elliptical. In such a case, at least three different views on examined fibre are needed. This paper deals with analytical description of fibre ovality measurement using two different approaches based on the principles of linear algebra and projective geometry. As a result, a considerable part of the work is devoted to these branches of mathematics with particular regard to analytical conics theory. Additionally, the work contains a brief mention of technical realization of ovality measurement and its possible difficulties.

klíčová slova

vlákno, ovalita, aplikace, lineární algebra, projektivní geometrie, euklidovská rovina, tečna, kuželosečka, elipsa, Brianchonova věta, princip duality

keywords

fibre, ovality, application, linear algebra, projective geometry, Euclidean plane, tangent, conic section, ellipse, Brianchon's theorem, duality principle

Loučka, P.: *Měření ovality extrudovaného vlákna*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 59 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Měření ovality extrudovaného vlákna* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Pavla Štarhy, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Pavel Loučka

Tímto bych rád poděkoval své rodině za duševní a materiální podporu poskytnutou během období tvorby tohoto díla a panu doc. Ing. Pavlu Štarhovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, jeho cenné připomínky a podnětnou kritiku.

Pavel Loučka

Obsah

Úvod	11
1 EXTRUDOVANÉ VLÁKNO	12
1.1 Technické parametry	12
1.2 Ovalita vlákna	12
1.2.1 Motivace k měření ovality	12
1.2.2 Zařízení k měření ovality	12
1.2.3 Předpoklady měření	13
1.2.4 Nalezení aproximace vlákna	14
2 MATEMATICKÝ ÚVOD	17
2.1 Komplexní rozšíření prostoru	17
2.1.1 Komplexní rozšíření vektorového prostoru	17
2.1.2 Komplexní rozšíření reálného afinního prostoru	19
2.2 Projektivní rozšíření afinního prostoru	20
2.2.1 Projektivní prostory	20
2.2.2 Přejchod od projektivního prostoru k afinnímu	24
2.2.3 Projektivní rozšíření afinního prostoru	25
2.3 Bilineární a kvadratické formy	26
2.3.1 Bilineární formy	26
2.3.2 Kvadratické formy	29
2.3.3 Ortogonální transformace kvadratických forem	31
2.4 Teorie kuželoseček	33
2.4.1 Kuželosečky v projektivní rovině	33
2.4.2 Projektivní klasifikace kuželoseček	36
2.4.3 Afinní vlastnosti kuželoseček	36
2.4.4 Afinní klasifikace kuželoseček	38
2.4.5 Metrické vlastnosti kuželoseček	41
2.4.6 Metrická klasifikace kuželoseček	43
2.4.7 Klasifikace kuželoseček pomocí invariantů	44
2.4.8 Kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností	47
3 VÝPOČET OVALITY	50
3.1 Podmínky jednoznačného určení kuželosečky	50
3.2 Geometricky-analytický přístup	52
3.2.1 Popis metody	52
3.2.2 Výpočet koeficientů pomocné elipsy	54
3.3 Ryze analytický přístup	56
3.3.1 Popis metody	56
3.3.2 Výpočet koeficientů pomocné elipsy	57
3.4 Výpočet charakteristik pomocné elipsy z jejích koeficientů	62
Závěr	65
Literatura	66
Seznam použitých zkratk a symbolů	67
Seznam příloh	68

Úvod

Hlavními cíli této práce bylo popsat problematiku měření ovality extrudovaného vlákna, nastudovat potřebný matematický aparát a vytvořit jednoúčelovou aplikaci umožňující ovalitu extrudovaného vlákna odhadnout.

Samotná problematika měření ovality (zploštělosti) extrudovaného vlákna pochází z prostředí Laboratoře přenosu tepla a proudění při FSI VUT v Brně, kde se toto vlákno vyrábí a zkoumá. Zadání této práce pak bylo inspirováno patentem zařízení na měření ovality pana doc. Ing. Pavla Štarhy, PhD. a pana prof. Ing. Miroslava Raudenského, CSc. (pro více informací o patentu viz [1]). Kapitola 1 této práce tedy krátce pojednává o extrudovaném vlákně samotném (tj. jeho přibližných rozměrech a materiálu, ze kterého se vyrábí), o zařízení, které k měření ovality slouží, o technickém provedení měření a o jeho možných nedostatecích. Dále v této kapitole lze najít schématický návod, jak vlákno skutečného nedokonalého průřezu snímaného soustavou kamer aproximovat pomocí průřezu eliptického tvaru.

Kapitola 2 si klade za cíl shrnout a popsat poznatky z lineární algebry a projekтивní geometrie, které využijeme při řešení zadaného problému. Hlavním účelem této části je matematicky vystavět analytickou teorii kuželoseček, jejíž závěry jsou potřebné pro výpočet ovality vlákna.

Kapitola 3 pak staví na obsahu předešlých kapitol, aby pomocí dvou různých přístupů analyticky popsala samotný výpočet ovality. Obecné principy z oblasti teorie kuželoseček tedy aplikuje na elipsu, čímž ukazuje, jak lze spočítat její charakteristiky (tj. délku hlavní a vedlejší poloosy, polohu středu elipsy nebo úhel jejího natočení vůči souřadné soustavě), a tedy i ovalitu zkoumaného vlákna. Kromě obecných zákonitostí, které nabízí předešlá kapitola 2, také zmiňuje některé další doplňující věty potřebné k zavedení dvou objevujících se přístupů výpočtu.

V příloze může nakonec čtenář nalézt jednoúčelovou aplikaci modelující princip měření ovality vlákna včetně poznámek a návodu k obsluze.

1 EXTRUDOVANÉ VLÁKNO

1.1 Technické parametry

Extrudované vlákno, které se zkoumá v Laboratoři přenosu tepla a proudění při FSI VUT v Brně, má následující technické parametry:

- materiálem k jeho výrobě bývá *polypropylen* nebo různé *polyamidy*
- vlákno je duté, s vnějším průměrem v rozpětí 0,5 až 1,5 mm, nejčastěji to pak bývá kolem 0,8 mm

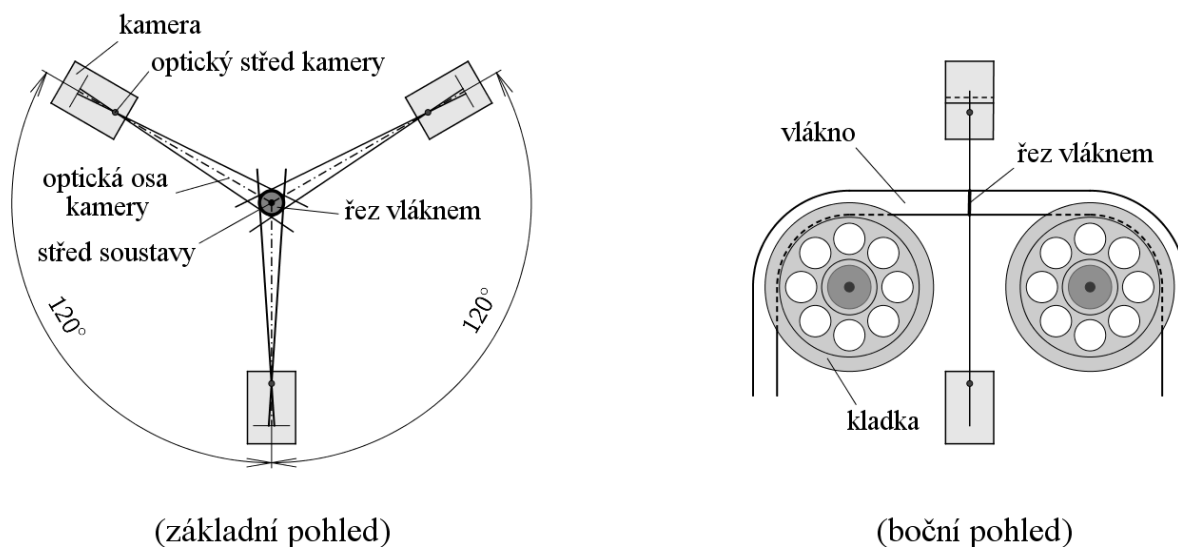
1.2 Ovalita vlákna

1.2.1 Motivace k měření ovality

Hlavní motivací ke zjišťování ovality vlákna je kontrola kvality. Námi zkoumané extrudované vlákno se totiž používá například k výrobě tepelných výměníků a možné zploštění vlákna způsobené extruzí může mít negativní vliv na jeho termodynamické vlastnosti. Ovalita extrudovaného vlákna je tedy klíčovým parametrem pro určení jeho správné funkčnosti.

1.2.2 Zařízení k měření ovality

Zařízení, které se v současné době používá v Laboratoři přenosu tepla a proudění při FSI VUT v Brně, je schématicky znázorněno na Obrázku 1:



Obrázek 1: Zařízení k měření ovality

(překresleno podle archivu pana doc. Ing. Pavla Štarhy, PhD.)

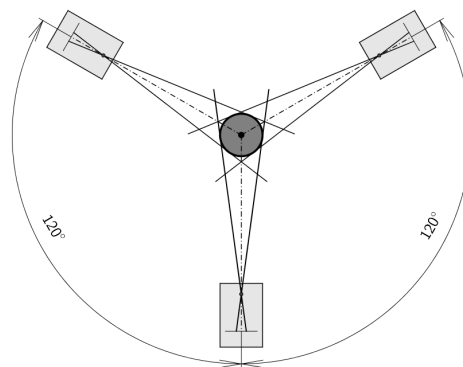
Zařízení se skládá z tří kamer rozmístěných dokola po 120° a kladkového systému. Vlákno po extruzi prochází těmito kladkami a na konci se navíjí na kotouče. V jednom úseku cesty je umístěna zmíněná trojice kamer, která principem středového promítání snímá průřez vlákna, a tím i jeho zdánlivé průměry.

1.2.3 Předpoklady měření

Z důvodu nepřesně seřízené soustavy kamer a zvláště kvůli deformacím vlákna, ke kterým dochází během extruze a následného navíjení, se úkol stanovit přesně ovalitu vlákna komplikuje. Nejdříve uvažujme dva stavy, ve kterých by se měřicí soustava a zkoumané vlákno mohly (respektive můžou) octnout:

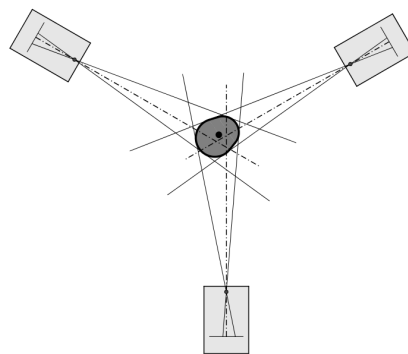
a) *ideální stav*

- kamery jsou rozmístěny po 120°
- optické osy se protínají v jednom místě (*střed soustavy*)
- kamery jsou stejně vzdáleny od vlákna
- vlákno má dokonale kruhový průřez
- střed (těžiště) průřezu vlákna splývá se středem soustavy



b) *reálný stav*

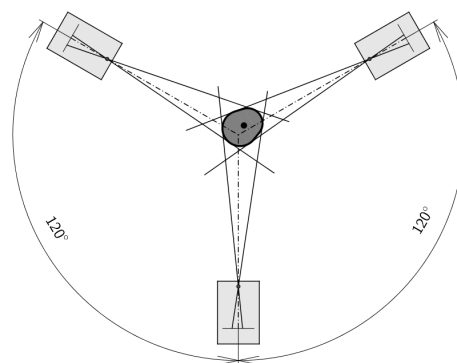
- kamery nejsou rozmístěny po 120°
- optické osy se neprotínají v jednom místě
- kamery jsou různě vzdáleny od vlákna
- vlákno nemá dokonale kruhový průřez
- střed (těžiště) průřezu vlákna nemusí splývat se středem soustavy



Stav a) nikdy nenastane a pro stav b) se matematický popis problému komplikuje. Protože soustava kamer je mechanicky seřízena poměrně přesně, ale zároveň se vlákno při průchodu kladkami může vychylovat do stran, lze předpokládat stav c) definovaný takto:

c) *předpokládaný stav*

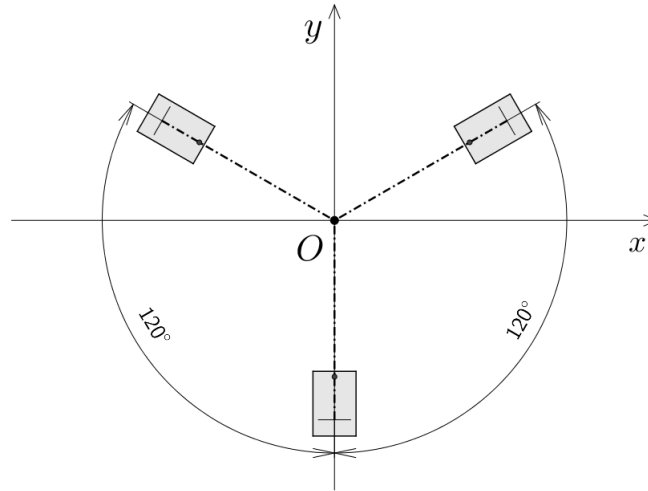
- kamery jsou rozmístěny po 120°
- optické osy se protínají v jednom místě (*střed soustavy*)
- kamery můžou být různě daleko od vlákna
- vlákno nemá dokonale kruhový průřez
- střed (těžiště) průřezu vlákna nemusí splývat se středem soustavy



Vzhledem k deformacím zkoumaného vlákna způsobeného pohybem po kladkách nabývá jeho průřez tvaru podobného oválu. Přesně matematicky popsat skutečný průřez ovšem nelze, a proto budeme dále uvažovat, že tímto průřezem je elipsa, kterou nazveme *aproximací vlákna*. Schématický postup, jak tuto elipsu najít, si ukážeme dále.

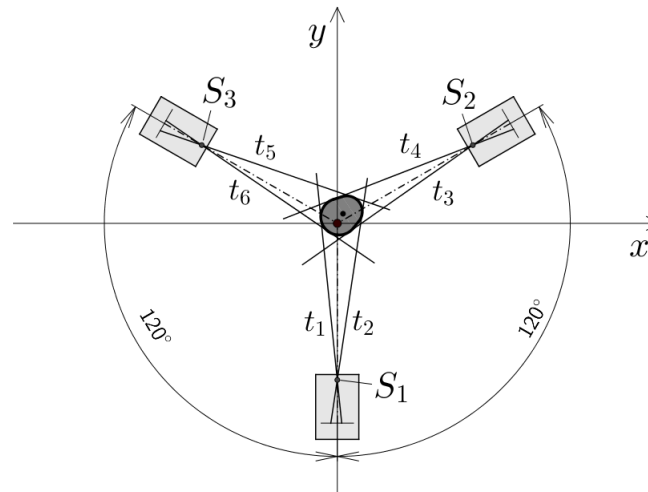
1.2.4 Nalezení aproximace vlákna

Abychom byli schopni hledání parametrů průřezu vlákna popsat analyticky, zavedeme nejprve v základním pohledu na měřicí zařízení (viz Obrázek 1) pravotočivou kartézskou souřadnou soustavu s počátkem v jejím středu:



Obrázek 2: Souřadný systém v měřicí soustavě

Dále je důležité si uvědomit, že kamery snímají vlákno středovým promítáním. Je tedy možné najít parametrická vyjádření přímek, které se opticky dotýkají jeho průřezu:



Obrázek 3: Optické tečny průřezu vlákna

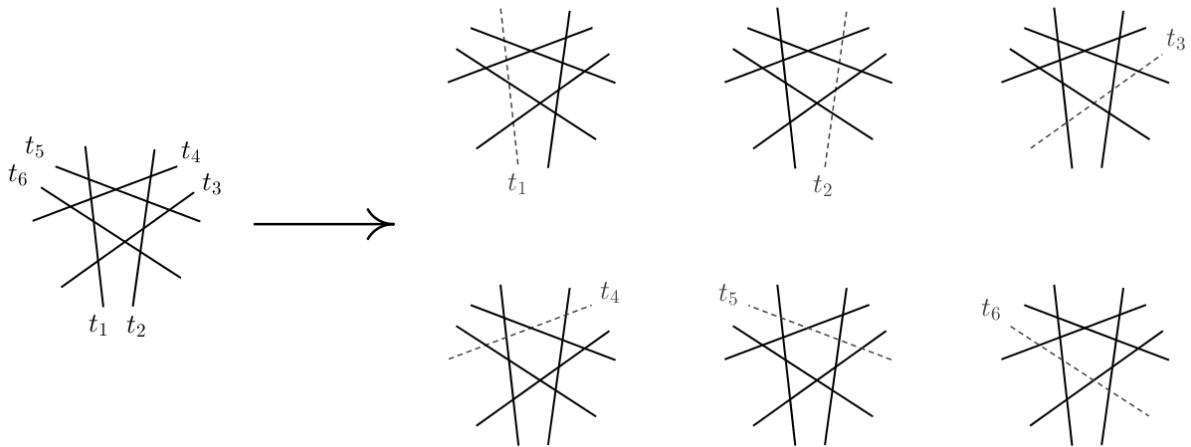
Tyto přímky nazýváme *optické tečny průřezu vlákna* a dají se dle Obrázku 3 parametricky popsat jako

$$\begin{aligned} t_1 : X_1 &= S_1 + r_1 \mathbf{v}_1, & t_3 : X_3 &= S_2 + r_3 \mathbf{v}_3, & t_5 : X_5 &= S_3 + r_5 \mathbf{v}_5, \\ t_2 : X_2 &= S_1 + r_2 \mathbf{v}_2, & t_4 : X_4 &= S_2 + r_4 \mathbf{v}_4, & t_6 : X_6 &= S_3 + r_6 \mathbf{v}_6, \end{aligned} \quad (1.1)$$

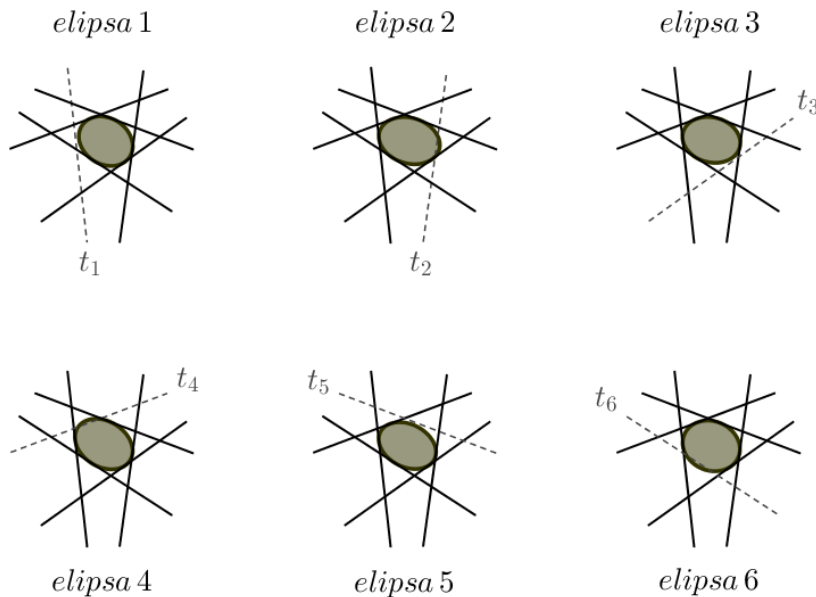
kde $X_i, i = 1, \dots, 6$, je libovolný bod i -té optické tečny, $S_j, j = 1, 2, 3$, je optický střed j -té kamery, $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 6$, je směrový vektor i -té optické tečny a $r_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 6$, reálná čísla.

Máme tedy k dispozici šest přímk, které se opticky dotýkají vláknového průřezu. Obecně ovšem nemusí existovat elipsa, které se dotýká celá šestice přímk, protože (jak bude dále rozvedeno v kapitole 3) každá regulární kuželosečka, a tedy i elipsa, je jednoznačně určena pěticí tečen splňujících určité předpoklady. Z tohoto důvodu je postup hledání této elipsy následující:

- 1) Z šestice dostupných přímk vybereme všechny jejich možné pětic (vždy zanedbáním jedné přímky), dostáváme tedy $\binom{6}{5} = 6$ různých pětic optických tečen:



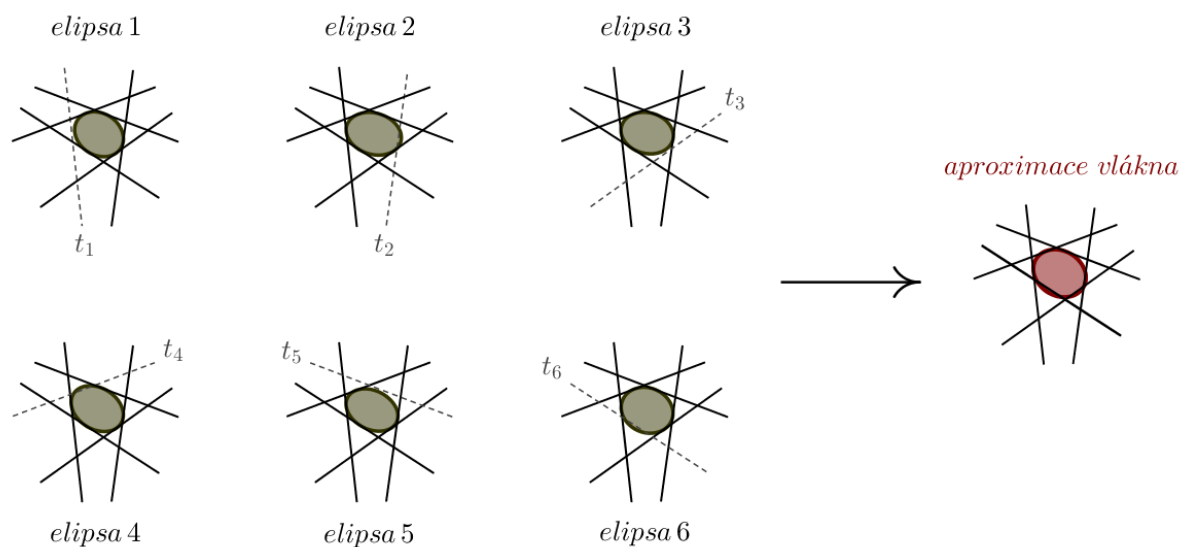
- 2) Pro každou pěticí přímk jednoznačně určíme elipsu, které se daná pětic dotýká:



takto určené elipsy pak nazýváme *pomocné elipsy průřezu vlákna*.

- 3) Vypočítáme charakteristiky každé této elipsy (zvláště *hlavní* a *vedlejší poloosu*, případně *úhel natočení* a *střed*) a u každé charakteristiky určíme její aritmetický

průměr. Elipsou s průměrnými hodnotami charakteristik bude právě hledaná aproximace vlákna:



Poznámka. Jak můžeme vidět již z obrázku výše, pomocné elipsy se nemusí dotýkat vyloučené optické tečny a aproximace vlákna obecně nemusí mít styk s žádnou z optických tečen. Naproti tomu v případě, že zkoumané vlákno by skutečně mělo průřez tvaru elipsy, pak by všechny pomocné elipsy byly identické, a tudíž i aproximace vlákna by splývala s libovolnou pomocnou elipsou.

Zde uvedený návod byl ale pouze schématický - neřešíme zde, jak pomocné elipsy určit ani neuvádíme způsob, jakým lze vypočítat jejich charakteristiky. Metodami k určení těchto elips a jejich charakteristik se bude podrobně zabývat kapitola 3. To by však nešlo bez znalosti potřebného matematického aparátu, který je shrnut v následující kapitole 2.

2 MATEMATICKÝ ÚVOD

Není-li uvedeno jinak, pak definice, věty a poznámky z této kapitoly jsou čerpány ze skript [2]. Důkazy zde zmíněných vět v této práci obvykle uvedeny nejsou, je možné je však najít právě v tomto skriptu.

2.1 Komplexní rozšíření prostoru

V analytické geometrii se obvykle prostory (vektorové, afinní, euklidovské) uvažují pouze nad tělesem reálných čísel. Pro potřeby teorie kuželoseček se však reálné prostory jeví jako nedostatečné. Ukážeme si, proč. V lineární geometrii, např. v euklidovské rovině, platí, že dvě souřadnicové lineární rovnice určují stejný geometrický objekt (nadrovinu) tehdy a jen tehdy, liší-li se o nenulový násobek. Mějme ale dvě rovnice 2. stupně

$$x^2 + y^2 = 0, \quad (1)$$

$$3x^2 + 2y^2 = 0, \quad (2)$$

kde $[x; y]$ jsou souřadnice bodu v rovině vzhledem k nějakému ortonormálnímu repéru. Je zřejmé, že oběma rovnicím vyhovují pouze souřadnice počátku, tj. určují stejnou množinu v euklidovské rovině, ačkoli rovnice (2) není násobkem rovnice (1). V této kapitole proto zavedeme takzvané komplexní rozšíření reálného prostoru tak, abychom docílili toho, že i dvě rovnice 2. stupně určují tutéž množinu právě tehdy, liší-li se o nenulový násobek.

2.1.1 Komplexní rozšíření vektorového prostoru

Předpokládejme, že V je vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem reálných čísel. Podobným způsobem, jako se v teorii čísel sestrojí komplexní rozšíření tělesa reálných čísel v těleso komplexních čísel, sestrojíme i komplexní rozšíření vektorového prostoru V . Uvažujme množinu $V \times V$ a definujme na ní operaci sčítání a násobení komplexním číslem následujícím způsobem

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}), \quad (2.1)$$

$$(\alpha + i\beta)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}, \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}), \quad (2.2)$$

Snadno se ověří, že $V \times V$ spolu s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými vztahy (2.1) a (2.2) je vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} .

Definice 2.1. Množinu $V \times V$ s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými vztahy (2.1) a (2.2) budeme nazývat *komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru* V a označovat $V^{\mathbb{C}}$.

Poznámka. V je podmnožina ve $V^{\mathbb{C}}$, ale ne vektorový podprostor, protože V je definováno nad \mathbb{R} a $V^{\mathbb{C}}$ nad \mathbb{C} .

Nyní můžeme každý vektor $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^{\mathbb{C}}$ psát následujícím způsobem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + (\mathbf{o}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + i(\mathbf{o}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

Vektor $\mathbf{u} \in V$ budeme nazývat *reálnou složkou (částí)* a vektor $\mathbf{v} \in V$ *imaginární složkou (částí)* vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$ a označovat $\mathbf{u} = \operatorname{Re}(\mathbf{w})$, $\mathbf{v} = \operatorname{Im}(\mathbf{w})$. Nulovým vektorem $V^{\mathbb{C}}$ je $(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = \mathbf{o} + i\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Věta 2.1. Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou lineárně nezávislé v prostoru V tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně nezávislé v prostoru $V^{\mathbb{C}}$.

Věta 2.2. Každá báze prostoru V je i bází prostoru $V^{\mathbb{C}}$.

Definice 2.2. Každá báze prostoru $V^{\mathbb{C}}$, která je současně i bází V , se nazývá *reálná báze*.

Věta 2.3. Bud' U podprostor vektorového prostoru V . Potom $U^{\mathbb{C}}$ je podprostorem vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$.

Definice 2.3. Podprostor W vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$, který je komplexním rozšířením podprostoru $U \subseteq V$, se nazývá *reálný podprostor* a označujeme ho $U^{\mathbb{C}}$.

Ne každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ je reálný, ale každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ obsahuje nějaký reálný podprostor, minimálně triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$.

Vektory $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ a $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$ se nazývají vektory *komplexně sdružené*. Je-li $\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$, budeme komplexně sdružený vektor označovat $\overline{\mathbf{w}}$. Je-li $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ vektorový podprostor, je $\overline{W} = \{\overline{\mathbf{w}} | \mathbf{w} \in W\}$ vektorový podprostor nazývaný *podprostor komplexně sdružený* k podprostoru W .

Pro komplexně sdružené vektory ve $V^{\mathbb{C}}$ platí vztahy obdobné vztahům pro komplexně sdružená čísla. Pro $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^{\mathbb{C}}, k \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{w} + \mathbf{w}'} &= \overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'}, \\ \overline{k\mathbf{w}} &= \overline{k}\overline{\mathbf{w}},\end{aligned}$$

kde \overline{k} je číslo komplexně sdružené k číslu k . Dále platí

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{w} + \operatorname{Im} \overline{\mathbf{w}}), \\ \operatorname{Im}(\mathbf{w}) &= \frac{i}{2}(\mathbf{w} - \overline{\mathbf{w}}).\end{aligned}$$

Věta 2.4. Vektorový podprostor $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ je reálný právě tehdy, když $W = \overline{W}$.

Důsledek 2.1. Nechť W je podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$. Potom maximální reálný podprostor obsažený ve W je $W \cap \overline{W}$.

Věta 2.5. Nechť V a U jsou reálné vektorové prostory a $\phi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow U^{\mathbb{C}}$ takové, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ je $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$. Je-li lineární zobrazení φ prosté, je i lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ prosté a je-li φ surjektivní, je i $\varphi^{\mathbb{C}}$ surjektivní.

Definice 2.4. Zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ definované ve Větě 2.5 se nazývá *komplexní rozšíření lineárního zobrazení φ* .

Věta 2.6. Pro libovolné lineární zobrazení φ z V do U jsou matice A_{φ} a $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k reálným bázím ve $V^{\mathbb{C}}$ a $U^{\mathbb{C}}$ totožné.

Poznámka. Je třeba si uvědomit, jaký je rozdíl mezi souřadnicovým vyjádřením libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ a komplexním rozšířením lineárního zobrazení z V do U . Zatímco matice komplexního rozšíření reálného lineárního zobrazení vzhledem k reálným bázím je definována nad \mathbb{R} , je obecně matice libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ definována nad \mathbb{C} .

2.1.2 Komplexní rozšíření reálného afinního prostoru

Definice 2.5. Necht' \mathcal{A} je neprázdná množina, jejíž prvky nazýváme *bod*y; necht' V je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} reálných čísel a dále necht' $\overrightarrow{} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ je zobrazení splňující:

- (1) Pro libovolný bod $A \in \mathcal{A}$ a libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ existuje jediný bod $B \in \mathcal{A}$ s vlastností $\overrightarrow{(A, B)} := \overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$.
- (2) Pro libovolné body $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Potom trojice $(\mathcal{A}, V, \overrightarrow{})$ se nazývá *afinní prostor* (dále budeme psát jen \mathcal{A}). Vektorový prostor V se nazývá *zaměření afinního prostoru* \mathcal{A} a označuje se $Z(\mathcal{A})$.

Je-li $\dim V = n$, pak říkáme, že afinní prostor \mathcal{A} je n -rozměrný (nebo též dimenze n), a píšeme $\dim \mathcal{A} = n$ (nebo označujeme zkráceně \mathcal{A}_n).

Je-li $\dim \mathcal{A} = 1$ (respektive 2, respektive 3), nazýváme afinní prostor \mathcal{A} *afinní přímkou* (respektive *afinní rovinou*, respektive *afinním prostorem*). [3]

K zavedení komplexního rozšíření reálného afinního prostoru z Definice 2.5 nám poslouží následující věta.

Věta 2.7. Bud' $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \mathcal{A} \times V$ a zobrazení $\overrightarrow{}^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ (komplexní rozšíření prostoru V) definované vztahem

$$\overrightarrow{(X, \mathbf{u})(Y, \mathbf{v})}^{\mathbb{C}} = \overrightarrow{XY} + i(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

kde $X, Y \in \mathcal{A}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Potom trojice $(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}}, \overrightarrow{}^{\mathbb{C}})$ je komplexní afinní prostor.

Definice 2.6. Komplexní afinní prostor $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ sestrojený ve Větě 2.7 nazýváme *komplexní rozšíření reálného afinního prostoru* \mathcal{A} .

Definice 2.7. Bud' \mathcal{B} afinní podprostor v \mathcal{A} a W jeho zaměření. Potom množinu $\mathcal{B} \times W$ nazýváme *komplexní rozšíření podprostoru* \mathcal{B} a značíme ji $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$.

Je zřejmé, že $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ je afinním podprostorem v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Obráceně ale neplatí, že každý afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ je komplexním rozšířením nějakého afinního podprostoru v \mathcal{A} . Například bod $X + i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ je afinním podprostorem v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ není komplexním rozšířením žádného podprostoru v \mathcal{A} . Afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, který vznikl jako komplexní rozšíření afinního podprostoru v \mathcal{A} , budeme nazývat *reálný afinní podprostor*.

Ke každému bodu $X + i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ můžeme sestrojít bod $X - i\mathbf{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. Tento bod budeme nazývat *komplexně sdružený k bodu* $X + i\mathbf{u}$. Jsou-li dva body z $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ navzájem komplexně sdruženy, pak jejich souřadnice v libovolné reálné afinní souřadné soustavě v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ jsou uspořádané n -tice navzájem komplexně sdružených čísel. Je-li \mathcal{B} afinní podprostor v $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ určený bodem $B \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ a zaměřením $W \subset V^{\mathbb{C}}$, je podprostor určený bodem \overline{B} a zaměřením \overline{W} afinní podprostor komplexně sdružený k afinnímu podprostoru \mathcal{B} a budeme ho označovat $\overline{\mathcal{B}}$. Podprostor \mathcal{B} je reálný právě tehdy, je-li $\mathcal{B} \equiv \overline{\mathcal{B}}$.

Obecně mohou podprostory $\mathcal{B} = B, W$ a $\overline{\mathcal{B}} = \overline{B}, \overline{W}$ mít nejruznější vzájemné polohy. Mohou být mimoběžné, rovnoběžné i různoběžné. V případě, že jsou různoběžné, je jejich průnik reálný podprostor.

Určování vzájemných poloh, průniku a součtu podprostorů je stejné jako v reálném případě.

Věta 2.8. Mějme dány reálné afinní prostory \mathcal{A}_n a \mathcal{A}_m a afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_m$. Potom existuje právě jedno afinní zobrazení $f^{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$ takové, že $f^{\mathbb{C}}(X) = f(X)$ pro každý bod $X \in \mathcal{A}_n$.

Definice 2.8. Zobrazení $f^{\mathbb{C}}$ definované ve Větě 2.8 se nazývá *komplexní rozšíření afinního zobrazení* f .

Poznámka. Platí $\varphi_f^{\mathbb{C}} = \varphi_{f^{\mathbb{C}}}$.

Každá afinní souřadná soustava v \mathcal{A}_n určuje současně reálnou afinní souřadnou soustavu v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$. Z předchozí poznámky a Věty 2.6 vyplývá, že souřadnicová vyjádření reálného afinního zobrazení a jeho komplexního rozšíření jsou vzhledem k reálným afinním souřadným soustavám v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ (respektive v $\mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$) totožná. To znamená, že matice komplexního rozšíření afinního zobrazení má v reálných afinních souřadných soustavách reálné koeficienty na rozdíl od matice obecného afinního zobrazení z $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ do $\mathcal{A}_m^{\mathbb{C}}$, jejíž koeficienty jsou komplexní čísla.

2.2 Projektivní rozšíření afinního prostoru

V teorii kuželoseček a kvadrik hrají důležitou úlohu nevlastní body, které si lze intuitivně představit jako body, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky. Tyto body ovšem nepatří do afinního prostoru a při použití afinních souřadnic se nedají souřadnicově vyjádřit. Proto v této kapitole zavedeme pojem projektivního rozšíření afinního prostoru, v němž budeme moci pracovat také s nevlastními body, které můžeme vyjádřit rovněž pomocí souřadnic.

2.2.1 Projektivní prostory

V této kapitole V_{n+1} je $(n+1)$ -rozměrný vektorový prostor nad tělesem \mathbb{T} (dále bude \mathbb{T} buď těleso reálných nebo komplexních čísel).

Definice 2.9. Množinu \mathcal{P}_n všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V_{n+1} nazveme *n -rozměrným projektivním prostorem nad tělesem \mathbb{T}* . Jeho prvky nazýváme body. V_{n+1} nazýváme *aritmetickým základem (nosičem) prostoru \mathcal{P}_n* . Vektor $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, který generuje bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle = \{\alpha \mathbf{x}, \alpha \in \mathbb{T}\} \in \mathcal{P}_n$ nazýváme *aritmetickým zástupcem bodu X* .

Poznámka. Každý bod $A \in \mathcal{P}_n$ má nekonečně mnoho aritmetických zástupců, protože jednodimenzionální podprostor má nekonečně mnoho bází. Je-li \mathbf{a} aritmetickým zástupcem bodu A , tj. $A = \langle \mathbf{a} \rangle$, je i $\alpha \mathbf{a}$, $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq 0$, aritmetickým zástupcem bodu A .

Poznámka. Přesněji by mělo být řečeno, že projektivním prostorem je dvojice (\mathcal{P}_n, V_{n+1}) . Pokud nemůže dojít k záměně vektorového prostoru V_{n+1} , budeme psát jen \mathcal{P}_n .

Definice 2.10. Body $A_1 = \langle \mathbf{a}_1 \rangle, \dots, A_k = \langle \mathbf{a}_k \rangle$ nazveme *lineárně nezávislé (závislé)*, jestliže jsou lineárně nezávislé (závislé) vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Řekneme, že bod $A = \langle \mathbf{a} \rangle$ je *lineární kombinací bodů $A_1; \dots; A_k$* , jestliže vektor \mathbf{a} je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Je-li $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, píšeme formálně $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k$.

Poznámka. Z vlastností vektorových prostorů vyplývá, že v \mathcal{P}_n existuje nejvýše $(n+1)$ lineárně nezávislých bodů.

Poznámka. Lineárně nezávislé body budeme také nazývat *body v obecné poloze*.

Definice 2.11. *Aritmetickou bází* projektivního prostoru \mathcal{P}_n rozumíme libovolnou bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ vektorového prostoru V_{n+1} . *Geometrickou bází (projektivním repérem)* prostoru \mathcal{P}_n rozumíme libovolnou $(n+2)$ -tici bodů $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ takových, že libovolných $(n+1)$ z nich je lineárně nezávislých. Body $O_1; \dots; O_{n+1}$ nazýváme *základní body* a bod E *jednotkový bod* geometrické báze.

Věta 2.9. Je-li $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ aritmetická báze prostoru \mathcal{P}_n , potom

$$\langle \langle \mathbf{u}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}_{n+1} \rangle, \langle \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle \rangle$$

je geometrická báze \mathcal{P}_n .

Definice 2.12. Nechť $X \in \mathcal{P}_n$ je bod, $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ je geometrická báze \mathcal{P}_n taková, že $O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle, \dots, O_{n+1} = \langle \mathbf{u}_{n+1} \rangle, E = \langle \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle$. Nechť $X = \langle \mathbf{x} \rangle$, kde

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}$$

$x_i \in \mathbb{T}$. Potom uspořádanou $(n+1)$ -tici (x_1, \dots, x_{n+1}) prvků z \mathbb{T} nazveme *projektivními homogenními souřadnicemi bodu X vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$* .

Věta 2.10. Nechť bod $X \in \mathcal{P}_n$ má vzhledem k libovolné geometrické bázi $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ projektivní homogenní souřadnice $(x_1; \dots; x_{n+1})$. Potom

- (i) alespoň jedno z čísel $x_1; \dots; x_{n+1}$ je nenulové,
- (ii) $(y_1; \dots; y_{n+1})$ jsou také projektivní homogenní souřadnice bodu X vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ tehdy a jenom tehdy, když existuje $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq 0$, takové, že $y_i = \alpha x_i$, $i = 1, \dots, n+1$.

Věta 2.11. Body $A_1; \dots; A_k$ jsou lineárně nezávislé tehdy a jenom tehdy, když matice, jejíž řádky či sloupce tvoří souřadnice bodů $A_1; \dots; A_k$ vzhledem k nějaké geometrické bázi, má hodnotu k .

Definice 2.13. Nechť (\mathcal{P}_n, V_{n+1}) je projektivní prostor a W_{k+1} je $(k+1)$ -rozměrný podprostor ve V_{n+1} , pak množinu všech bodů projektivního prostoru \mathcal{P}_n , jejichž aritmetičtí zástupci patří do W_{k+1} , nazveme *k -rozměrným projektivním podprostorem* prostoru \mathcal{P}_n . Jednorozměrný podprostor nazýváme *přímka*, dvourozměrný *rovina* a $(n-1)$ -rozměrný *nadrovina* v \mathcal{P}_n .

Věta 2.12. Nechť (\mathcal{Q}_k, W_{k+1}) a (\mathcal{R}_l, U_{l+1}) jsou dva podprostory projektivního prostoru (\mathcal{P}_n, V_{n+1}) . Pak platí:

- (i) množina $\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l = \{ \langle \mathbf{u} \rangle \mid \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in W_{k+1} + U_{l+1} \}$ je projektivním podprostorem v \mathcal{P}_n ,
- (ii) $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l$ je projektivním podprostorem v \mathcal{P}_n , přičemž $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l = \{ \langle \mathbf{u} \rangle \mid \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in W_{k+1} \cap U_{l+1} \}$.

Poznámka. Při označení z Věty 2.12 nazýváme podprostor $\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l$ *součtem (spojením)* a $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l$ *průnikem* projektivních podprostorů \mathcal{Q}_k a \mathcal{R}_l . Z vlastností součtu a průniku vektorových podprostorů je zřejmé, že $\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l$ obsahuje jako podmnožinu množinové sjednocení \mathcal{Q}_k a \mathcal{R}_l . Dále platí $\dim(\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l) = k + l - \dim(\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l)$.

Věta 2.13. Nechť \mathcal{Q}_k je k -rozměrný podprostor v \mathcal{P}_n . Pak

- (i) v \mathcal{Q}_k existuje $k+1$ lineárně nezávislých bodů,
- (ii) libovolných $l \geq k+2$ bodů z \mathcal{Q}_k je lineárně závislých,
- (iii) jsou-li $A_1 = \langle \mathbf{a}_1 \rangle, \dots, A_{k+1} = \langle \mathbf{a}_{k+1} \rangle$ lineárně nezávislé body z \mathcal{Q}_k a $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_n$, pak $X \in \mathcal{Q}_k$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}$ pro nějaká $\lambda_i \in \mathbb{T}$ a alespoň jedno $\lambda_i \neq 0$.

Důkaz. Vlastnosti (i) a (ii) jsou zřejmé z lineární nezávislosti aritmetických zástupců. (iii) Nechť \mathcal{Q}_k má aritmetický základ W_{k+1} . Potom $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$ je báze W_{k+1} a tedy, je-li $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{Q}_k$, je $\mathbf{x} \neq \mathbf{o} \in W_{k+1}$ a existují $\lambda_i \in \mathbb{T}$, $i = 1, \dots, k+1$ taková, že

$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{a}_i$ a alespoň jedno λ_i je nenulové. Každý bod $X \in \mathcal{Q}_k$ lze napsat formálně jako

$$X = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{k+1} A_{k+1}, \quad (2.3)$$

kde $A_1; \dots; A_{k+1}$ jsou libovolné lineárně nezávislé body z \mathcal{Q}_k . Takového zadání k -rozměrného podprostoru pomocí lineárně nezávislých bodů budeme nazývat *parametrické zadání podprostoru* \mathcal{Q}_k . \square

Poznámka. Je-li bod $X \in \mathcal{Q}_k$ vyjádřen jako v rovnici (2.3), budeme říkat, že X je *projektivní kombinací* lineárně nezávislých bodů $A_1; \dots; A_{k+1}$. Všimněme si, že u projektivní kombinace bodů klademe na koeficienty $\lambda_i \in \mathbb{T}$, $i = 1, \dots, k+1$, jedinou podmínku, a to, aby alespoň jedno λ_i bylo nenulové. To je rozdíl proti afinní kombinaci bodů, kterou známe z afinní lineární geometrie, kde byla podmínka, aby součet koeficientů byl roven jedné. Parametrického zápisu projektivního podprostoru se často používá v případě jednodimenzionálního podprostoru, tj. přímky. Je-li přímka p určena body $A, B \in \mathcal{P}_n$, $A \neq B$, potom $X \in p$ právě tehdy, když

$$X = \alpha A + \beta B$$

a alespoň jedno z čísel α, β je různé od nuly.

Věta 2.14. *Nechť \mathcal{P}_n je projektivní prostor a $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ je jeho geometrická báze.*

- (i) *Nechť $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ln+1} & \dots & a_{ln+1} \end{pmatrix}$ je matice nad \mathbb{T} , $h(M) \leq n$. Potom množina všech bodů X z \mathcal{P}_n , jejichž projektivní homogenní souřadnice $(x_1; \dots; x_{n+1})$ vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ i vyhovují homogenní soustavě rovnic*

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

- (ii) *Každý podprostor v \mathcal{P}_n lze zadat způsobem popsaným v (i).*

Poznámka. Všimněme si, že na rozdíl od obecného vyjádření podprostoru v afinním nebo euklidovském prostoru, je obecné vyjádření podprostoru v projektivním prostoru dáno homogenními rovnicemi.

Poznámka. Z předchozího obecného vyjádření nadroviny okamžitě vyplývá, že dvě nadroviny v \mathcal{P}_n buď splývají (v tom případě se jejich obecné rovnice liší o nenulový násobek), nebo mají společný podprostor dimenze $(n-2)$. V projektivním prostoru tedy není definován pojem rovnoběžnosti nadrovin.

Přechod od jednoho typu zadání podprostoru k druhému je následující. Nechť k -rozměrný podprostor \mathcal{Q}_k je zadán obecným vyjádřením (2.4). Potom každé řešení soustavy (2.4) je tvaru $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{k+1} \mathbf{u}_{k+1}$, kde $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}$ je fundamentální systém řešení (2.4). Potom $X = c_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle + \dots + c_{k+1} \langle \mathbf{u}_{k+1} \rangle$ je parametrické vyjádření \mathcal{Q}_k . Opačně, je-li zadáno parametrické vyjádření, musíme k danému fundamentálnímu systému řešení nalézt příslušný homogenní systém rovnic. Z algebry víme, že to lze provést vždy a tento systém rovnic je potom obecným vyjádřením podprostoru \mathcal{Q}_k . Mějme nyní dvě geometrické báze v \mathcal{P}_n

$$\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle, \quad (2.5)$$

$$\langle O'_1; \dots; O'_{n+1}, E' \rangle \quad (2.6)$$

takové, že $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle$, $E = \langle \sum_i \mathbf{e}_i \rangle$, $O'_i = \langle \mathbf{e}'_i \rangle$, $E' = \langle \sum_i \mathbf{e}'_i \rangle$ Potom vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$ a $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n+1}$ tvoří dvě báze ve V_{n+1} , a tedy každý vektor \mathbf{e}'_i je lineární kombinací vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$. Maticově to můžeme zapsat formálně ve tvaru

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_{n+1}) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n+1}) Q, \quad (2.7)$$

kde matice Q je takzvaná *matice přechodu* od báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$ k bázi $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n+1}$ a je tvořena souřadnicemi vektorů \mathbf{e}'_i vzhledem k druhé bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$ uspořádanými do sloupců. Potom vektor $\mathbf{x} \in V$, který generuje bod $X \in \mathcal{P}_n$ můžeme vzhledem k první bázi vyjádřit maticově jako

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

a vzhledem k druhé jako

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_{n+1}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme nyní za $\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_{n+1}$ z (2.7) a dostaneme

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n+1}) Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Máme tedy dvě vyjádření vektoru \mathbf{x} vzhledem k první bázi. Protože souřadnicová vyjádření bodu X vzhledem k téže geometrické bázi se mohou lišit o nenulový násobek, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \alpha Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix},$$

$\alpha \neq 0 \in \mathbb{T}$. Matice αQ se nazývá *matice přechodu* od první geometrické báze k druhé geometrické bázi. V jejích sloupcích jsou souřadnice bodů O'_i vyjádřené vzhledem ke staré

geometrické bázi. Matice αQ je určena až na nenulový násobek. Budeme-li $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$

značit sloupcovou matici projektivních homogenních souřadnic vzhledem ke staré geometrické bázi a $(X') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$ vzhledem k nové geometrické bázi, je $(X) = \alpha Q (X')$

maticový zápis transformačních rovnic v projektivním prostoru.

2.2.2 Přechod od projektivního prostoru k afinnímu

Nechť \mathcal{P}_n je n -rozměrný projektivní prostor a V_{n+1} jeho aritmetický základ. Nechť \mathcal{N} je nadrovina (tj. podprostor dimenze $(n-1)$) v \mathcal{P}_n určený vektorovým podprostorem $U_n \subset V_{n+1}$. Dále budeme \mathcal{N} nazývat *nadrovinou nevlastních bodů*.

Zvolme geometrickou bázi $O_1; \dots; O_n \in \mathcal{N}$, $O_{n+1}, E \notin \mathcal{N}$, $O_i = \langle \mathbf{e}_i \rangle$, $E = \langle \sum_i \mathbf{e}_i \rangle$, $i = 1, \dots, n+1$. Označme $\mathcal{A}_n := \mathcal{P}_n - \mathcal{N}$. Potom ve zvolené geometrické bázi má \mathcal{N} obecné rovnice $x_{n+1} = 0$. Nechť $X = \langle \mathbf{x} \rangle$, $Y = \langle \mathbf{y} \rangle \in \mathcal{A}_n$. Potom

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}, & x_{n+1} &\neq 0, \\ \mathbf{y} &= y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}, & y_{n+1} &\neq 0.\end{aligned}$$

Položme $\bar{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$, $\bar{y}_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}$, $i = 1, \dots, n$, a $\overrightarrow{XY} = (\bar{y}_1 - \bar{x}_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\bar{y}_n - \bar{x}_n)\mathbf{e}_n$. Je zřejmé, že je takto definováno zobrazení $\overrightarrow{} : \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \longrightarrow U_n$. Aby trojice $(\mathcal{A}_n, U_n, \overrightarrow{})$ tvořila afinní prostor, musíme dokázat, že platí následující axiomy afinního prostoru:

1. pro každý bod X z \mathcal{A}_n a každý vektor \mathbf{u} z U_n existuje právě jeden bod Y z \mathcal{A}_n takový, že $\overrightarrow{XY} = \mathbf{u}$,
2. pro každé tři body X, Y, Z z \mathcal{A}_n platí $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Ad 1) Nechť $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$. Hledáme $Y \in \mathcal{A}_n$ tak, aby $\overrightarrow{XY} = \mathbf{u}$, tedy aby

$$\frac{y_i}{y_{n+1}} - \frac{x_i}{x_{n+1}} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Známe-li x_1, \dots, x_{n+1} a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, jsou těmito rovnicemi určeny y_1, \dots, y_{n+1} až na nenulové násobky, a tedy bod Y je určen jednoznačně svými projektivními homogenními souřadnicemi.

Ad 2) Pro každé tři body $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ o souřadnicovém vyjádření $X = (x_1; \dots; x_{n+1})$, $Y = (y_1; \dots; y_{n+1})$, $Z = (z_1; \dots; z_{n+1})$ máme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} &= \left(\frac{y_1}{y_{n+1}} - \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{z_1}{z_{n+1}} - \frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}} - \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) = \\ &= \left(\frac{z_1}{z_{n+1}} - \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}} - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \overrightarrow{XZ}\end{aligned}$$

Tedy $(\mathcal{A}_n, U_n, \overrightarrow{})$ je afinní prostor se zaměřením U_n a protože dimenze U_n je rovna n , je i $\dim \mathcal{A}_n = n$. Přitom geometrická báze $\langle O_1; \dots; O_{n+1}, E \rangle$ přejde v afinní repér $\langle O_{n+1}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Je-li bod $X \notin \mathcal{N}$ s projektivními homogenními souřadnicemi $(x_1; \dots; x_{n+1})$, potom jeho souřadnicové vyjádření vzhledem k odpovídajícímu afinnímu repéru je $\left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right]$.

Je-li $X = (x_1; \dots; x_n, 0) \in \mathcal{N}$ v projektivních homogenních souřadnicích, potom mu odpovídá v indukované afinní souřadné soustavě směr generovaný vektorem $(x_1; \dots; x_n)$ ze zaměření U_n .

Poznámka. Popsaná konstrukce závisela v podstatné míře na zvolené geometrické bázi. Dá se ovšem ukázat, že ať zvolíme body $O_1; \dots; O_n \in \mathcal{N}$ jakkoliv, vzniká popsanou konstrukcí afinní prostor totožný s předchozím.

2.2.3 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Nechť $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_n, V_n, \rightarrow)$ je n -rozměrný afinní prostor. Označme $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ množinu všech jednodimenzionálních podprostorů (směrů) V_n , tj. $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{\langle \mathbf{u} \rangle \mid \mathbf{u} \neq \mathbf{o}, \mathbf{u} \in V\}$ je $(n-1)$ -rozměrný projektivní prostor. Položme $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$. Máme tedy v \mathcal{P}_n dva druhy bodů. Ty, které patří do \mathcal{A}_n , budeme nazývat *vlastní body* a ty, které patří do $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, budeme nazývat *nevlastní body*. Dokážeme nyní, že \mathcal{P}_n je n -rozměrný projektivní prostor.

Definujme $W_{n+1} = V_n \oplus \langle \mathbf{e} \rangle$, $\mathbf{e} \notin V_n$, vektorový prostor dimenze $(n+1)$ a \mathcal{P}'_n , jím určený n -rozměrný projektivní prostor. Musíme dokázat, že \mathcal{P}_n a \mathcal{P}'_n jsou izomorfní. Uvažujme zobrazení $\iota : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}'_n$ definované následujícím způsobem:

$$\begin{cases} \iota(X) = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OX} \rangle & \text{pro } X \in \mathcal{A}_n \text{ a pevný bod } O \in \mathcal{A}_n \\ \iota(\langle \mathbf{x} \rangle) = \langle \mathbf{x} \rangle & \text{pro } \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \end{cases}$$

Nyní musíme dokázat, že ι je bijekce (tedy že je injektivní i surjektivní zároveň).

1) Injektivita. Na $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ jde o identitu, a tedy o prosté zobrazení. Nechť $X, Y \in \mathcal{A}_n$ jsou dva body takové, že $\iota(X) = \iota(Y)$. Potom $\langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OX} \rangle = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OY} \rangle$, a tedy existuje $\alpha \neq 0$ takové, že $\alpha(\mathbf{e} + \overrightarrow{OX}) = \mathbf{e} + \overrightarrow{OY}$ a odtud $(1 - \alpha)\mathbf{e} + \alpha\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \mathbf{o}$. Součet $V \oplus \langle \mathbf{e} \rangle$ je přímý, a tedy $(1 - \alpha)\mathbf{e} = \mathbf{o}$ a $\alpha\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \mathbf{o}$. Odtud, protože $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$, je $\alpha = 1$ a $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{XY} = \mathbf{o}$, což implikuje $X = Y$. Platí tedy, že ι je prosté i na \mathcal{A}_n . Pro $X \in \mathcal{A}_n$ a $Y \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ je z definice $\iota(X) \neq \iota(Y)$, a tedy ι je prosté zobrazení.

2) Surjektivita. Nechť $\mathbf{w} \in W_{n+1}$. Potom existují $\mathbf{v} \in V_n$ a $\beta \in \mathbb{T}$ taková, že $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \beta\mathbf{e}$.

a) Nechť $\beta = 0$, potom $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ a $\iota(\langle \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{w} \rangle$.

b) Nechť $\beta \neq 0$ a nechť $X \in \mathcal{A}_n$ tak, že $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{\beta}\mathbf{v}$.

Potom $\iota(X) = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{OX} \rangle = \langle \mathbf{e} + \frac{1}{\beta}\mathbf{v} \rangle = \langle \beta\mathbf{e} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} \rangle$. Protože $\mathbf{w} \in W_{n+1}$ bylo libovolné, je surjektivita ι dokázána.

Definice 2.14. Projektivní prostor $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ budeme nazývat *projektivní rozšíření afinního prostoru \mathcal{A}_n* a označovat $\overline{\mathcal{A}}_n$.

Nechť $\mathcal{B}_k = (\mathcal{B}_k, U_k, \rightarrow)$ je k -rozměrný podprostor afinního prostoru \mathcal{A}_n . Potom projektivní rozšíření $\overline{\mathcal{B}}_k = \mathcal{B}_k \cup \mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ afinního prostoru \mathcal{B}_k je k -rozměrným projektivním podprostorem v projektivním rozšíření $\overline{\mathcal{A}}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ afinního prostoru \mathcal{A}_n .

Nechť

$$\langle P, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle \tag{2.8}$$

je afinní repér v \mathcal{A}_n . Potom

$$\langle \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{e}_n \rangle, \langle \mathbf{e} \rangle, \langle \mathbf{e} + \sum_i \mathbf{e}_i \rangle \rangle \tag{2.9}$$

je geometrická báze projektivního prostoru $\overline{\mathcal{A}}_n$. Je-li bod $X \in \overline{\mathcal{A}}_n$ vlastní, tj. leží-li v \mathcal{A}_n , jsou jeho souřadnice vzhledem k afinnímu repéru (2.8) označovány $\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n$. Tyto souřadnice budeme nazývat *afinní nehomogenní souřadnice* bodu X vzhledem k afinnímu repéru (2.8). Vzhledem k indukované geometrické bázi (2.9) má potom bod $X = \langle \mathbf{e} + \overrightarrow{PX} \rangle$ indukované projektivní homogenní souřadnice $(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n, 1)$, které jsou ale určeny až na nenulový násobek, a tedy jakákoliv uspořádaná $(n+1)$ -tice $(x_1; \dots; x_{n+1})$ prvků z \mathbb{T} takových, že $x_{n+1} \neq 0$ a $\bar{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ je homogenními projektivními souřadnicemi vlastního

bodu $X \in \overline{\mathcal{A}}_n$ určenými afinním repérem (2.8). Tyto souřadnice budeme nazývat *afinní homogenní souřadnice* bodu X vzhledem k afinnímu repéru (2.8).

Nechť nyní $X \in \overline{\mathcal{A}}_n$ je nevlastní bod, tj. $X = \langle \mathbf{x} \rangle$, kde \mathbf{x} je nenulový vektor ze zaměření \mathcal{A}_n . Potom vzhledem k afinnímu repéru (2.8) má vektor \mathbf{x} souřadnice $(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n)$ a v indukované geometrické bázi (2.9) na $\overline{\mathcal{A}}_n$ je bod $X = \langle \mathbf{x} + 0\mathbf{e} \rangle$ vyjádřen souřadnicemi $(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n, 0)$, které budeme nazývat *afinními homogenními souřadnicemi* nevlastního bodu vzhledem k afinnímu

Zavedení afinních homogenních souřadnic nám tedy umožňuje pracovat souřadnicově i s nevlastními body, což nehomogenní souřadnice neumožňovaly. repéru (2.8).

2.3 Bilineární a kvadratické formy

V této kapitole se budeme zabývat úvodem do algebraické teorie bilineárních a kvadratických forem, které jsou algebraickým základem analytické teorie kuželoseček.

2.3.1 Bilineární formy

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{T} , kde \mathbb{T} je těleso reálných nebo komplexních čísel.

Definice 2.15. Zobrazení $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{T}$ se nazývá *bilineární forma* na vektorovém prostoru V , jestliže pro každé tři vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a každé $\alpha \in \mathbb{T}$ platí

- (1) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$,
- (2) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$,
- (3) $f(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Podmínky (1)–(3) se dají také vyjádřit tak, že při pevně zvoleném vektoru $\mathbf{u} \in V$ jsou zobrazení $f(-, \mathbf{u}) : V \longrightarrow \mathbb{T}$ a $f(\mathbf{u}, -) : V \longrightarrow \mathbb{T}$ lineární. Je tedy f lineární v obou složkách a takovéto zobrazení se nazývá *bilineární zobrazení*.

Poznámka. Podmínky (1)–(3) z Definice 8.1 se dají vyjádřit ekvivalentně také podmínkami

- (1') $f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y})$,
- (2') $f(\mathbf{x}, \alpha_1\mathbf{y}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{y}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$.

Poznámka. Zúžení bilineární formy f na podprostor V' je bilineární forma na V' .

Příklad 2.1. Skalární součin na reálném vektorovém prostoru je příkladem bilineární formy.

Příklad 2.2. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, je takzvaná *nulová bilineární forma*.

Příklad 2.3. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, zobrazení $f_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaná předpisem

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_1y_2, \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1y_1 + x_2y_2, \\ f_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2, \\ f_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1y_2 - x_2y_1 \end{aligned}$$

jsou bilineární formy na V . Zobrazení

$$f_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_2 - y_1 + x_1y_2$$

není bilineární formou.

Definice 2.16. Řekneme, že bilineární forma f na V je *symetrická*, respektive *antisymetrická*, jestliže pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, respektive $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Příklad 2.4. Skalární součin je příkladem symetrické bilineární formy. Bilineární formy f_2 a f_3 z Příkladu 2.3 jsou symetrické bilineární formy, zatímco f_4 je antisymetrická bilineární forma.

Definice 2.17. *Součtem* bilineárních forem f, g na V , respektive *násobkem* bilineární formy f prvkem $\alpha \in \mathbb{T}$, nazýváme zobrazení $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{T}$, respektive $k : V \times V \longrightarrow \mathbb{T}$, taková, že pro $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

respektive

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Značíme potom $h = f + g$, respektive $k = \alpha f$.

Poznámka. Součet i násobek bilineárních forem na V jsou opět bilineární formy na V a prostor bilineárních forem na V je vektorovým prostorem nad tělesem \mathbb{T} .

Věta 2.15. *Ke každé bilineární formě f na V existují právě jedna symetrická bilineární forma f_S a právě jedna antisymetrická bilineární forma f_A na V takové, že*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Důkaz. Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ položíme

$$\begin{aligned} f_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})), \\ f_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že f_S je symetrická a f_A je antisymetrická bilineární forma a že $f = f_S + f_A$. Nechť existuje jiná symetrická bilineární forma f'_S a antisymetrická bilineární forma f'_A takové, že $f = f'_S + f'_A$. Potom

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= f'_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f'_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f'_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f'_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme $f'_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) = f_S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Podobně odečtením dostaneme $f'_A = f_A$. \square

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je libovolná báze ve V . Potom $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_n\mathbf{u}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \dots + y_n\mathbf{u}_n$, kde $x_i, y_i \in \mathbb{T}$. Dosazením dostaneme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f\left(\sum_i x_i \mathbf{u}_i, \sum_j y_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_i x_i \sum_j y_j f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$

Označme $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ a uvažujme matici $A_f = (a_{ij})$. Potom můžeme psát

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j. \quad (2.10)$$

Definice 2.18. (2.10) je souřadnicovým vyjádřením bilineární formy f v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a matice $A_f = (f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$ se nazývá *matice bilineární formy f* v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Poznámka. Bilineární forma f je symetrická (antisymetrická) bilineární forma právě tehdy, je-li A_f symetrická (antisymetrická) matice.

Souřadnicové vyjádření vektoru $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n)$ vzhledem k libovolné bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ budeme ztotožňovat s maticí $(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Potom bilineární formu f můžeme psát maticově ve tvaru

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \dots x_n) (a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x})^T A_f (\mathbf{y})$$

Příklad 2.5. V kanonické bázi na \mathbb{R}^2 jsou matice bilineárních forem f_1, \dots, f_4 z Příkladu 2.3

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.19. *Hodnotí bilineární formy* f rozumíme hodnotu matice formy A_f v libovolné bázi. Je-li A_f regulární matice, nazýváme bilineární formu f *regulární*, je-li A_f singulární, nazýváme i bilineární formu f *singulární*.

Věta 2.16. *Hodnota bilineární formy nezávisí na zvolené bázi.*

Definice 2.20. Nechť f je symetrická bilineární forma na V . *Singulárním vektorem* formy f rozumíme vektor \mathbf{y} takový, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$.

Poznámka. V případě, že f není symetrická bilineární forma, musíme definovat zvlášť levé a pravé singulární vektory.

Vyjádříme-li bilineární formu $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ v libovolné bázi, dostaneme z podmínky

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \dots x_n) A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

pro každý vektor \mathbf{x} soustavu homogenních lineárních rovnic

$$A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff \begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n & = & 0 \end{array}, \quad (2.11)$$

kterou musí splňovat souřadnice singulárního vektoru \mathbf{y} . Singulární vektory tedy tvoří podprostor ve V , jehož dimenze je $n - h(A_f)$.

Věta 2.17. *Nechť V je reálný vektorový prostor a $V^{\mathbb{C}}$ jeho komplexní rozšíření. Ke každé bilineární formě f na V existuje právě jedna bilineární forma $f^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ taková, že $f^{\mathbb{C}}|_V = f$.*

Definice 2.21. Bilineární forma $f^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ definovaná ve Větě 2.17 se nazývá *komplexní rozšíření reálné bilineární formy* f .

2.3.2 Kvadratické formy

Definice 2.22. Zobrazení $F : V \longrightarrow \mathbb{T}$ se nazývá *kvadratická forma* na vektorovém prostoru V , jestliže existuje bilineární forma f taková, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ je $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Říkáme potom, že bilineární forma f určuje kvadratickou formu F .

Příklad 2.6. Nulová kvadratická forma (tj. $F(\mathbf{x}) = 0$ pro všechna \mathbf{x}) je určena libovolnou antisymetrickou bilineární formou.

Příklad 2.7. Je-li V reálný euklidovský vektorový prostor, je zobrazení „velikost vektoru na druhou“ kvadratickou formou určenou skalárním součinem.

Podobně jako pro bilineární formy můžeme definovat součet kvadratických forem a součin kvadratické formy s prvky z \mathbb{T} .

$$\begin{aligned}(F + G)(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \\ (\alpha F)(\mathbf{x}) &= \alpha F(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Věta 2.18. Ke každé kvadratické formě existuje právě jedna symetrická bilineární forma, která ji určuje.

Definice 2.23. Symetrická bilineární forma f určující kvadratickou formu F se nazývá *polární bilineární forma* k F .

Dále automaticky pro danou kvadratickou formu F je f její polární bilineární forma.

Příklad 2.8. Skalární součin je polární bilineární forma ke kvadratické formě dané velikostí vektoru na druhou.

Definice 2.24. *Hodnotí kvadratické formy* rozumíme hodnotu příslušné polární bilineární formy. Říkáme, že kvadratická forma je *regulární* (*singulární*), je-li regulární (singulární) příslušná polární bilineární forma. *Singulárním vektorem* kvadratické formy rozumíme singulární vektor příslušné polární bilineární formy.

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je báze V a

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1 \dots x_n) (a_{ij}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x})^T A_F(\mathbf{x})$$

je souřadnicové vyjádření kvadratické formy F , kde A_F je symetrická matice nazývaná *matice kvadratické formy* F v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. Souřadnicově můžeme také psát

$$\begin{aligned}F(\mathbf{x}) &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)x_1 + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)x_n = \\ &= F_1(\mathbf{x})x_1 + \dots + F_n(\mathbf{x})x_n,\end{aligned}$$

kde $F_i(\mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$ je takzvaná *i-tá lineární forma přidružená (asociovaná) k F* .

Ze souřadnicového vyjádření pro singulární vektory bilineární formy dostaneme, že vektor \mathbf{x} je singulárním vektorem kvadratické formy F právě tehdy, když

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= 0,\end{aligned}\tag{2.12}$$

to jest právě tehdy, když $F_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, F_n(\mathbf{x}) = 0$.

Definice 2.25. Bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ vektorového prostoru V nazýváme *polární bázi* kvadratické formy F , jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, platí $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$.

Věta 2.19. Ke každé kvadratické formě existuje polární báze.

V souřadnicovém vyjádření má potom Věta 2.19 následující tvar.

Věta 2.20. Ke každé kvadratické formě

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

existuje taková lineární transformace

$$x_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}y_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

že souřadnicové vyjádření F v souřadnicích $y_1; \dots; y_n$ je tvaru

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_{ii}y_i^2,$$

tj. matice B_F kvadratické formy F je diagonální.

Definice 2.26. Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru. Říkáme, že F je

- a) *pozitivně definitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) > 0$,
- b) *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) \geq 0$,
- c) *negativně definitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) < 0$,
- d) *negativně semidefinitní*, jestliže pro každý $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F(\mathbf{x}) \leq 0$,
- e) existují-li vektory $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ takové, že $F(\mathbf{y}) > 0$ a $F(\mathbf{z}) < 0$, říkáme, že F je *indefinitní*.

Typ kvadratické formy se snadno pozná, je-li forma vyjádřena v polární bázi, tj. je-li její souřadnicový zápis v kanonickém tvaru

$$F(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

Potom kvadratická forma F je pozitivně definitní, je-li $a_{ii} > 0$, pozitivně semidefinitní, je-li $a_{ii} \geq 0$, negativně definitní, je-li $a_{ii} < 0$ a negativně semidefinitní, je-li $a_{ii} \leq 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Forma je indefinitní, existují-li koeficienty $a_{ii} > 0$ a $a_{jj} < 0$.

Pro nenulové koeficienty a_{ii} v kanonickém tvaru kvadratické formy můžeme provést transformaci souřadnic

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}y_i$$

V nových souřadnicích jsou potom všechny koeficienty u 2. mocnin souřadnic 1, -1, případně 0. Vhodnou permutací souřadnic docílíme toho, že souřadnicové vyjádření kvadratické formy je tvaru

$$F(\mathbf{x}) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2, \quad p + q \leq n$$

Tento tvar se nazývá *normální tvar* kvadratické formy. Dvojice (p, q) se nazývá *signatura* kvadratické formy. Polární bázi, ve které má kvadratická forma normální tvar, budeme nazývat *normovanou polární bázi*.

Následující věta je nejdůležitější větou algebraické teorie kvadratických forem a nazývá se *věta o setrvačnosti kvadratických forem*.

Věta 2.21. Normální tvar kvadratické formy nezávisí na lineární transformaci souřadnic, která převádí danou kvadratickou formu do normálního tvaru.

Poznámka. Jinak řečeno, předchozí věta říká, že signatura kvadratické formy je jednoznačně určena kvadratickou formou a ne jejím souřadnicovým vyjádřením. Máme-li tedy dvě kvadratické formy vyjádřeny v souřadnicích a mají-li tyto formy stejnou signaturu, jedná se vlastně o tutéž formu vyjádřenou v různých bázích.

Věta 2.22. Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V , pak existuje právě jedna kvadratická forma $F^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ taková, že $F^{\mathbb{C}}|V = F$.

Definice 2.27. Kvadratická forma $F^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ definovaná ve Větě 2.22 se nazývá *komplexní rozšíření reálné kvadratické formy* F .

2.3.3 Ortogonální transformace kvadratických forem

V této části práce nechť V_n je n -rozměrný euklidovský vektorový prostor, tj. reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Připomeňme, že skalární součin je zobrazení

$$(-, -) : V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

takové, že

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ (\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq 0, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Skalární součin je tedy symetrická bilineární forma na V_n taková, že odpovídající kvadratická forma je pozitivně definitní. Normovaná polární báze příslušná ke kvadratické formě, která je určena skalárním součinem, se nazývá *ortonormální báze*. Připomeňme, že v libovolné ortonormální bázi má skalární součin souřadnicové vyjádření

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n,$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Maticově lze tento vztah vyjádřit jako

$$(\mathbf{u})^T E_n (\mathbf{v}),$$

kde E_n je jednotková matice řádu n a vektory jsou ztotožněny se sloupcovými maticemi jejich souřadnic.

Nechť nyní F je libovolná kvadratická forma na V_n . Zajímá nás, zda existuje ortonormální báze V_n taková, že v ní má F kanonický tvar. Odpověď je kladná. Důkaz existence (který v této práci ovšem vynecháme) i algoritmus hledání ortonormální báze, která je současně polární vzhledem k F , je založen na dvou větách z teorie matic (nebo ekvivalentně z teorie lineárních zobrazení). Nejdříve si připomeneme několik základních pojmů.

Nechť $A = (a_{ij})$ je libovolná reálná čtvercová matice řádu n . Mějme na V_n pevně zvolenou bázi. Nulový vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ se nazývá *vlastním vektorem* matice A , jestliže jeho souřadnice jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \tag{2.13}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Maticově můžeme soustavu (2.13) zapsat jako $A(\mathbf{u}) = \lambda E_n(\mathbf{u})$, což upravíme na tvar

$$(A - \lambda E_n)(\mathbf{u}) = (\mathbf{o}) \quad (2.14)$$

Protože podle předpokladu je \mathbf{u} nenulový vektor, má soustava (2.14) nenulové řešení právě tehdy, když

$$|A - \lambda E_n| = 0 \quad (2.15)$$

Rovnice (2.15) je polynomiální rovnicí vzhledem k λ a nazývá se *charakteristická rovnice* matice A . Kořeny charakteristické rovnice se nazývají *vlastní (charakteristická) čísla (hodnoty)* matice A . Dosadíme-li reálné vlastní číslo do soustavy (2.13), je řešením homogenní soustavy (2.13) nenulový podprostor V_n . Každé nenulové řešení bude vlastním vektorem příslušným pro danou vlastní hodnotu. Každý vlastní vektor určuje jednodimenzionální podprostor vlastních vektorů, který nazýváme *vlastní směr* určený maticí A .

Pro studium kvadratických forem na euklidovském vektorovém prostoru mají zásadní význam následující dvě věty z teorie matic.

Věta 2.23. *Nechť A je symetrická reálná matice řádu n . Pak všechny kořeny charakteristické rovnice $|A - \lambda E_n| = 0$ jsou reálné.*

Poznámka. Protože v dimenzi 2 je charakteristická rovnice kvadratická, dokázali bychom Větu (2.13) v dimenzi 2 snadno z elementárních vlastností kvadratické rovnice.

Věta 2.24. *Nechť A je symetrická reálná matice řádu n a λ je k -násobný kořen její charakteristické rovnice. Pak podprostor řešení homogenní soustavy pro výpočet vlastních vektorů příslušných λ má právě dimenzi k .*

Věta 2.25. *Nechť \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou vlastní vektory, které přísluší různým vlastním číslům λ_1, λ_2 symetrické matice A . Pak \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou kolmé, tj. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.*

Věta 2.26. *Nechť A_F a B_F jsou matice kvadratické formy F ve dvou různých ortonormálních bázích na V_n . Pak $|A_F - \lambda E_n| = |B_F - \lambda E_n|$.*

Poznámka. Z Věty 2.26 vyplývá, že charakteristická rovnice matice kvadratické formy je stejná v libovolné ortonormální bázi, můžeme tedy hovořit o *charakteristické rovnici kvadratické formy*. Dále je zřejmé, že i všechny kořeny charakteristické rovnice jsou nezávislé na zvolené ortonormální bázi a jsou to čísla, která jsou jednoznačně přiřazena dané kvadratické formě. Budeme je tudíž nazývat *charakteristická čísla kvadratické formy*.

Věta 2.27. *Ke každé kvadratické formě F na euklidovském vektorovém prostoru V_n existuje taková ortonormální báze V_n , že v ní má F kanonické rovnice tvaru*

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad (2.16)$$

kde $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, jsou charakteristická čísla kvadratické formy F .

2.4 Teorie kuželoseček

V této kapitole budeme studovat analytickou teorii kuželoseček v projektivní rovině a v projektivním rozšíření afinní a euklidovské roviny.

2.4.1 Kuželosečky v projektivní rovině

Nechť \mathcal{P}_2 je dvoudimenzionální reálný projektivní prostor s aritmetickým základem V_3 . Nechť $V_3^{\mathbb{C}}$ je komplexní rozšíření prostoru V_3 definované v podkapitole 2.1.1. Projektivní komplexní prostor s aritmetickým základem $V_3^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat *komplexním rozšířením projektivního prostoru \mathcal{P}_2* a označovat $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$. Reálnou projektivní rovinu \mathcal{P}_2 potom můžeme uvažovat jako podmnožinu (ne podprostor) v komplexní projektivní rovině $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, totiž bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_2$ právě tehdy, když existuje jeho aritmetický zástupce $\mathbf{x} \in V_3 \subset V_3^{\mathbb{C}}$. Body X ležící v $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat *reálné body* a body z $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ neležící v \mathcal{P}_2 budeme nazývat *imaginární body*.

Definice 2.28. Nechť F je nenulová kvadratická forma na V_3 . Množinu bodů $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ takových, že $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$, nazýváme *kuželosečkou* v projektivní rovině $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ a značíme \mathcal{K} .

Poznámka. Musíme ukázat, že naše definice má smysl, tj. že má smysl uvažovat body $X = \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ splňující rovnici $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Uvažujme libovolnou kvadratickou formu F na vektorovém prostoru V libovolné dimenze definovaném nad tělesem \mathbb{T} reálných či komplexních čísel. Potom $F(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 F(\mathbf{x})$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{T}$. Odtud, je-li $F(\mathbf{x}) = 0$ pro nějaký nenulový vektor \mathbf{x} , je $F(\alpha\mathbf{x}) = 0$ pro všechna α , a tedy opravdu rovnice $F(\mathbf{x}) = 0$ určuje v $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ množinu bodů.

Poznámka. Snadno se nahlédne, že dvě reálné nenulové kvadratické formy F a G určují stejnou kuželosečku právě tehdy, když existuje $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$ takové, že $G = \alpha F$. To znamená, že rovnice kuželosečky $F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je dána až na nenulový násobek.

Uvažujme nyní geometrickou bázi

$$\langle O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle, O_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle, O_3 = \langle \mathbf{u}_3 \rangle, E = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \rangle \rangle \quad (2.17)$$

prostoru \mathcal{P}_2 . Z definice geometrické báze a vlastností komplexního rozšíření vektorového prostoru vyplývá, že (2.17) je současně i geometrickou bází projektivního prostoru $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$. Přitom bod X je reálný právě tehdy, když jeho projektivní homogenní souřadnice vzhledem ke geometrické bázi (2.17) jsou reálná čísla a je imaginární právě tehdy, když alespoň jedna souřadnice je komplexní číslo s nenulovou imaginární částí. Vyjádřeme nyní rovnici kuželosečky $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ v geometrické bázi (2.17). Nechť bod X má v bázi (2.17) projektivní homogenní souřadnice (x_1, x_2, x_3) . Potom bod $X \in \mathcal{K}$ právě tehdy, když

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad (2.18)$$

kde $A = (a_{ij}) = (f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$ je matice kvadratické formy F v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ prostoru V_3 . Dále budeme, kromě rovnice (2.18), používat i zápis

$$\mathcal{K} : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

a při označení (X) jako sloupcové matice projektivních homogenních souřadnic,

tj. $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, můžeme psát

$$\mathcal{K} : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

nebo zkráceně

$$\mathcal{K} : (X)^T A(X) = 0.$$

Protože jsme v definici kuželosečky použili komplexní rozšíření reálné kvadratické formy, jsou všechny koeficienty a_{ij} v rovnici (2.18) reálná čísla, zatímco proměnné souřadnice mohou být i čísla komplexní. Při použití libovolné kvadratické formy bychom dostali kuželosečky, jejichž reálná část by neodpovídala kuželosečkám definovaným v syntetické geometrii jako množiny bodů daných vlastností. Je-li $\mathcal{K} \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, tj. \mathcal{K} neobsahuje žádný reálný bod, říkáme, že \mathcal{K} je *formálně reálná* nebo též *imaginární kuželosečka*.

Definice 2.29. Hodností kuželosečky $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ rozumíme hodnotu kvadratické formy F , to jest její matice A v libovolné bázi. Matici A budeme nazývat *maticí kuželosečky* v dané geometrické bázi, její prvky koeficienty kuželosečky a determinant $|A|$ nazýváme *diskriminantem kuželosečky*. Je-li kvadratická forma F regulární, nazveme kuželosečku \mathcal{K} *regulární (vlastní)* kuželosečkou a je-li F singulární kvadratická forma, nazveme kuželosečku \mathcal{K} *singulární (též nevlastní či degenerovanou)* kuželosečkou. [2, 5]

Věta 2.28. Hodnost kuželosečky nezávisí na zvolené geometrické bázi.

Věta 2.29. Nechť je dáno pět různých reálných bodů $A_i = \langle \mathbf{a}_i \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, $i = 1, \dots, 5$, takových, že žádné čtyři z nich neleží na jedné přímce. Pak existuje právě jedna kuželosečka $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$, že $A_i \in \mathcal{K}$.

Poznámka. Tvzení Věty 2.29 se dá zobecnit tak, že kuželosečka je určena 5 nezávislými podmínkami, kde jako podmínku rozumíme takovou informaci o kuželosečce, která v souřadnicích vede na lineární rovnici, kde jako neznámé vystupují prvky matice kuželosečky.

Jednoznačnému určení kuželosečky pomocí 5 prvků se pak více budeme zabývat v kapitole 3.

Definice 2.30. Nechť $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka. Body $P = \langle \mathbf{p} \rangle$, $Q = \langle \mathbf{q} \rangle \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ se nazývají *polárně sdružené* nebo *konjugované* vzhledem ke kuželosečce \mathcal{K} , jestliže $f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$.

Definice 2.31. Bod P nazveme *singulárním bodem* kuželosečky \mathcal{K} , je-li polárně sdružen vzhledem ke \mathcal{K} se všemi body roviny. Bod, který leží na kuželosečce \mathcal{K} a není jejím singulárním bodem, nazveme *regulárním bodem* kuželosečky \mathcal{K} .

Věta 2.30. Nechť $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka a P je její singulární bod. Nechť $Q \in \mathcal{K}$ a $Q \neq P$. Potom:

- (1) Bod P leží na \mathcal{K} .
- (2) Všechny body přímky PQ leží na \mathcal{K} .

Věta 2.31. Nechť kuželosečka $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ má v nějaké geometrické bázi v $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ rovnici (2.18), potom bod X je singulárním bodem \mathcal{K} právě tehdy, když jsou jeho projektivní homogenní souřadnice (x_1, x_2, x_3) řešením lineární soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

tj. $F_1(\mathbf{x}) = 0$, $F_2(\mathbf{x}) = 0$, $F_3(\mathbf{x}) = 0$.

Věta 2.32. Regulární kuželosečka nemá singulární body, singulární kuželosečka hodnosti 2 má právě jeden reálný singulární bod a singulární kuželosečka hodnosti 1 má reálnou přímku singulárních bodů.

Věta 2.33. Nechť $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka a $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ je bod, který není singulárním bodem \mathcal{K} . Množina všech bodů $X = \langle \mathbf{x} \rangle$ polárně sdružených s bodem P je přímka s rovnicí $p : f^{\mathbb{C}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$.

Definice 2.32. Přímku p z Věty 2.33 budeme nazývat *polárou* bodu P vzhledem ke kuželosečce \mathcal{K} a naopak bod P budeme nazývat *pólem* přímky p .

Poznámka. Nechť má kuželosečka \mathcal{K} rovnici (2.18). Potom rovnice poláry bodu $P = (p_1, p_2, p_3)$ vzhledem ke \mathcal{K} je

$$p : (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0$$

nebo zkráceně

$$p : F_1(\mathbf{p})x_1 + F_2(\mathbf{p})x_2 + F_3(\mathbf{p})x_3 = 0$$

Věta 2.34. Nechť $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka. Leží-li nesusingulární bod $P = \langle \mathbf{p} \rangle$ na poláře nesusingulárního bodu $Q = \langle \mathbf{q} \rangle$, pak bod Q leží na poláře bodu P .

Poznámka. Pro regulární kuželosečku \mathcal{K} je přiřazení pólu a poláry vzájemně jednoznačné zobrazení množiny bodů $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ na množinu přímek. Opravdu, je-li $p : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ obecné vyjádření nějaké přímky p , potom souřadnice jejího pólu splňují soustavu rovnic $F_1(\mathbf{p}) = \alpha a_1, F_2(\mathbf{p}) = \alpha a_2, F_3(\mathbf{p}) = \alpha a_3$, kde $\alpha \neq 0$ je číslo. Tato soustava lineárních rovnic pro neznámé souřadnice bodu P má jednoparametrické řešení (závislé na parametru α) právě tehdy, když je matice A regulární. Vztah mezi pólem a polární přímkou je projevem obecnější zákonitosti, která se nazývá *princip duality* (tomuto principu se více věnuje kapitola 3).

Věta 2.35. Nechť \mathcal{K} je kuželosečka a p je přímka. Potom buď p je podmnožina \mathcal{K} , nebo p a \mathcal{K} mají společné právě dva body. Přitom pro reálnou přímku jsou tyto body reálné různé, nebo komplexně sdružené, nebo reálné splývající a pro imaginární přímku jsou imaginární různé, nebo imaginární splývající.

Definice 2.33. Přímku p , která není přímkou singulárních bodů kuželosečky \mathcal{K} , nazýváme *tečnou* kuželosečky \mathcal{K} právě když platí buď $p \subset \mathcal{K}$, nebo p protíná \mathcal{K} v dvojnásobném (regulárním) bodě. Regulární bod, který je průnikem kuželosečky a její tečny, se nazývá *bodem dotyku*.

Věta 2.36. Nechť P je regulární bod kuželosečky $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$. Potom polára bodu P je tečnou kuželosečky \mathcal{K} s bodem dotyku P . Naopak každá tečna kuželosečky \mathcal{K} , na níž leží alespoň jeden bod, který není singulárním bodem \mathcal{K} , je polárou nějakého regulárního bodu \mathcal{K} ležícího na p .

Poznámka. Geometrická interpretace poláry pro regulární kuželosečky nyní vyplývá z Věty 2.34. Je-li bod P nesusingulární bod, který neleží na kuželosečce, potom polára bodu P vzhledem ke kuželosečce \mathcal{K} je spojnice bodů dotyku tečen, sestrojených ke kuželosečce z bodu P . Tato vlastnost poláry se dá velice výhodně využít pro určování rovnic tečen kuželosečky procházejících daným bodem. Pro singulární kuželosečky obsahuje polára libovolného (nesingulárního) bodu všechny singulární body kuželosečky.

2.4.2 Projektivní klasifikace kuželoseček

Věta 2.37. *Singulární kuželosečka hodnosti 1 je tvořena jednou reálnou (dvojnásobnou) přímkou.*

Věta 2.38. *Singulární kuželosečka hodnosti 2 je složena ze dvou přímek, které jsou buď komplexně sdružené nebo reálné různé.*

Definice 2.34. Přímký, které tvoří singulární kuželosečku, se nazývají *tvořícími přímkami* kuželosečky.

Věta 2.39. (Projektivní klasifikace kuželoseček)

Ke každé kuželosečce $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ existuje taková reálná geometrická báze prostoru $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, že v této bázi má kuželosečka \mathcal{K} právě jednu z následujících rovnic

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad (\text{Pk1})$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad (\text{Pk2})$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad (\text{Pk3})$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad (\text{Pk4})$$

$$x_1^2 = 0, \quad (\text{Pk5})$$

Definice 2.35. Rovnici kuželosečky \mathcal{K} z Věty 2.39 nazýváme *normální rovnicí kuželosečky*. Geometrickou bázi, ve které nabývá rovnice kuželosečky normální tvar, nazýváme *normovaná polární báze* kuželosečky \mathcal{K} .

Poznámka. Snadno se vidí, že kuželosečka určená rovnicí (Pk1) je regulární kuželosečka, která neobsahuje žádný reálný bod. Jedná se tedy o imaginární regulární kuželosečku. (Pk2) určuje reálnou regulární kuželosečku. (Pk3) a (Pk4) určují singulární kuželosečky hodnosti 2, které jsou tvořeny dvojicí tvořících přímek. Přitom pro (Pk3) jsou tyto přímky komplexně sdružené a pro (Pk4) reálné. (Pk3) obsahuje jediný reálný bod, a to průsečík komplexně sdružených tvořících přímek. (Pk5) je singulární kuželosečka hodnosti 1, která je tvořena jednou (reálnou) dvojnásobnou tvořící přímkou.

2.4.3 Afinní vlastnosti kuželoseček

V této a další části uvažujeme \mathcal{A}_2 reálnou afinní rovinu, $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ její komplexní rozšíření a $\overline{\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}}$ projektivní rozšíření $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$. Jako kuželosečku v \mathcal{A}_2 potom rozumíme kuželosečku $\overline{\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}}$.

Uvažujme na \mathcal{A}_2 afinní souřadnou soustavu určenou afinním repérem

$$\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle. \quad (2.19)$$

V indukovaných afinních homogenních souřadnicích (x_1, x_2, x_3) má kuželosečka v \mathcal{A}_2 rovnici

$$\mathcal{K} : \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (2.20)$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, což píšeme maticově jako

$$\mathcal{K} : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

a zkráceně, při označení $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pouze $(X)^T A(X) = 0$.

Při přechodu k nehomogenním souřadnicím pro vlastní body $[\bar{x}_1; \bar{x}_2]$, $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_3}$, $\bar{x}_2 = \frac{x_2}{x_3}$, můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\mathcal{K} : \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + 2 \sum_{i=1}^2 a_{i3} \bar{x}_i + a_{33} = 0.$$

nebo, při obvyklejším označení nehomogenních souřadnic $X = [x; y]$,

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.21)$$

Maticově, při označení matice nehomogenních souřadnic bodu X jako $(\bar{X}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{K} : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{12} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0, \quad (2.22)$$

což píšeme symbolicky, při označení matice $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, vektoru $(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ a konstanty $a = a_{33}$, maticově

$$\mathcal{K} : (\bar{X})^T \bar{A} (\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T (\bar{X}) + a = 0. \quad (2.23)$$

Uvědomme si, že rovnice (2.22) a (2.23) určují pouze vlastní body kuželosečky. Pokud budeme pracovat s nevlastními body, musíme použít afinních homogenních souřadnic a rovnici kuželosečky (2.20).

Definice 2.36. Bod S se nazývá střed kuželosečky \mathcal{K} , je-li vzhledem ke \mathcal{K} polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Poznámka. Každý singulární bod kuželosečky je jejím středem. Střed kuželosečky, který není jejím singulárním bodem, má za svou poláru nevlastní přímku.

Věta 2.40. *Nechť má kuželosečka \mathcal{K} v afinních homogenních souřadnicích vzhledem k afinnímu repéru (2.19) rovnici $\mathcal{K} : (X)^T A(X) = 0$. Bod $S = [s_1; s_2; s_3]$ je středem kuželosečky k právě tehdy, když platí*

$$\begin{aligned} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 &= 0, \\ a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

tj. $F_1(\mathbf{s}) = 0, F_2(\mathbf{s}) = 0$.

Poznámka. Soustava (2.24) má v homogenních souřadnicích vždy nenulové řešení. Podle hodnoty soustavy (2.24) může mít kuželosečka právě jeden reálný střed, reálnou přímku středů, nebo každý bod roviny je středem. Poslední možnost nastává pouze tehdy, když jediný nenulový koeficient matice kuželosečky je a_{33} , tj. pouze tehdy, je-li kuželosečka tvořena dvojnásobnou nevlastní přímkou.

Přepsáním soustavy (2.24) do nehomogenních souřadnic dostaneme soustavu pro výpočet vlastních středů kuželosečky \mathcal{K}

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{s}_1 + a_{12}\bar{s}_2 + a_{13} &= 0, \\ a_{12}\bar{s}_1 + a_{22}\bar{s}_2 + a_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

kterou maticově zapisujeme $\bar{A}(\bar{S}) + (\mathbf{a}) = (\mathbf{o})$. Nehomogenní soustava (2.25) nemusí mít řešení, tj. kuželosečka \mathcal{K} nemusí mít vlastní střed.

Definice 2.37. Kuželosečka, která má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá *středová kuželosečka*. Kuželosečka, která nemá vlastní střed, se nazývá *nestředová kuželosečka*.

Věta 2.41. Středová kuželosečka je středově symetrická podle každého vlastního středu.

Definice 2.38. Nechť $\mathcal{K} : F^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = 0$ je kuželosečka a Q je nevlastní bod, který není bodem kuželosečky \mathcal{K} . Poláru bodu Q budeme nazývat *průměrem* kuželosečky \mathcal{K} .

Poznámka. Je-li přímka p průměrem kuželosečky \mathcal{K} , pak obsahuje všechny středy kuželosečky \mathcal{K} .

Definice 2.39. Říkáme, že dva směry určené vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou *polárně sdruženy* vzhledem ke kuželosečce \mathcal{K} , jsou-li vzhledem ke \mathcal{K} polárně sdruženy nevlastní body určené těmito směry. Dva průměry, jejichž zaměření jsou polárně sdružena vzhledem ke kuželosečce \mathcal{K} , se nazývají *sdružené průměry* kuželosečky \mathcal{K} .

Definice 2.40. Tečnu v nevlastním regulárním bodě kuželosečky \mathcal{K} nazýváme *asymptotou* kuželosečky \mathcal{K} .

Věta 2.42. Každá regulární kuželosečka má nejvýše dvě asymptoty.

Poznámka. Protože nevlastní přímka není tvořící přímkou kuželosečky, obsahuje kuželosečka buď dva nevlastní různé reálné body, nebo dva nevlastní komplexně sdružené body, nebo jeden nevlastní dvojnásobný reálný bod (viz Věta 2.35). V prvním případě má kuželosečka dvě různé reálné asymptoty, ve druhém dvě komplexně sdružené asymptoty a ve třetím jednu asymptotu, která je nevlastní přímkou.

Věta 2.43. Nechť \mathcal{K} je kuželosečka, která neobsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku, a nechť vzhledem k nějakému afinnímu repéru má \mathcal{K} rovnici (2.22). Potom

- (1) kuželosečka \mathcal{K} má dva různé reálné nevlastní body (dvě různé reálné asymptoty) právě tehdy, když $|\bar{A}| < 0$,
- (2) kuželosečka \mathcal{K} má dva komplexně sdružené nevlastní body (dvě komplexně sdružené asymptoty) právě tehdy, když $|\bar{A}| > 0$,
- (3) kuželosečka \mathcal{K} má jeden dvojnásobný reálný nevlastní bod (jednu nevlastní asymptotu) právě tehdy, když $|\bar{A}| = 0$.

2.4.4 Afinní klasifikace kuželoseček

Definice 2.41. Kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva komplexně sdružené body, budeme nazývat kuželosečkou *eliptického typu*. Kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva reálné různé body, budeme nazývat kuželosečkou *hyperbolického typu* a kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společný právě jeden dvojnásobný bod, budeme nazývat kuželosečkou *parabolického typu*.

Regulární kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společné právě dva komplexně sdružené body, budeme nazývat *elipsou*. Regulární kuželosečku, která má s nevlastní

přímkou společné právě dva reálné různé body, budeme nazývat *hyperbolou* a regulární kuželosečku, která má s nevlastní přímkou společný právě jeden dvojnásobný bod, budeme nazývat *parabolou*.

Aplikujeme-li nyní Definici 2.41 na projektivní typy kuželoseček (viz Poznámka k Definici 2.35), dostaneme následující afinní typy kuželoseček:

Formálně reálná regulární kuželosečka nemá žádný reálný nevlastní bod a je to tedy elipsa, kterou budeme nazývat *imaginární elipsou*. Reálná regulární kuželosečka se nyní rozdělí na tři typy podle počtu a druhu nevlastních bodů. Bude to (reálná) *elipsa*, *hyperbola* a *parabola*.

Elipsa a hyperbola jsou kuželosečky středové, zatímco parabola je nestředová. Hyperbola má dvě reálné asymptoty. Asymptoty elipsy jsou komplexně sdružené přímky a parabola má jednu nevlastní asymptotu. Reálná elipsa, hyperbola a parabola se tedy liší pouze tím, že elipsa neprotíná reálně nevlastní přímku, hyperbola ji reálně protíná ve dvojici různých bodů a parabola se nevlastní přímkou dotýká.

U kuželosečky, která je složena ze dvou reálných různých přímek, mohou nastat tři případy. Buď je jedna z tvořících přímek nevlastní (takovou kuželosečku nelze zadat v nehomogenních souřadnicích), nebo jsou obě tvořící přímky vlastní. V tomto případě může být jejich společný bod vlastní (různoběžné přímky - kuželosečka hyperbolického typu), nebo nevlastní (rovnoběžky - kuželosečka parabolického typu). U kuželosečky, která je složena ze dvou komplexně sdružených přímek, rozlišujeme dvě možnosti. Společný reálný bod těchto dvou přímek je buď vlastní (komplexně sdružené různoběžky - kuželosečka eliptického typu), nebo nevlastní (komplexně sdružené rovnoběžky - kuželosečka parabolického typu).

Kuželosečka, která je tvořena jedinou dvojnásobnou tvořící přímkou, je buď nevlastní (nedá se v nehomogenních souřadnicích vyjádřit), nebo vlastní (kuželosečka parabolického typu).

Věta 2.44. *Nechť kuželosečka \mathcal{K} , která neobsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku, je v nějaké afinní souřadné soustavě zadána rovnicí (2.20). Pak \mathcal{K} je*

- (1) *imaginární elipsou, právě když $|A| \neq 0, |\bar{A}| > 0$ a na \mathcal{K} neexistují reálné body,*
- (2) *(reálnou) elipsou, právě když $|A| \neq 0, |\bar{A}| > 0$ a na \mathcal{K} existují reálné body,*
- (3) *hyperbolou, právě když $|A| \neq 0$ a $|\bar{A}| < 0$,*
- (4) *parabolou, právě když $|A| \neq 0$ a $|\bar{A}| = 0$.*

Poznámka. Podmínka, že kuželosečka je regulární je v souřadnicích ekvivalentní tomu, že diskriminant kuželosečky je nenulový, tj $|A| \neq 0$. Pro určení typu kuželosečky stačí zjistit počet a typ nevlastních bodů, které na kuželosečce leží. Věta 2.44 nyní vyplývá z Věty 2.43. Při $|\bar{A}| > 0$ musíme ještě navíc rozlišovat, zda se jedná o imaginární nebo reálnou elipsu.

Věta 2.45. *Kuželosečka \mathcal{K} , která neobsahuje nevlastní přímku jako svou tvořící přímku, je složena*

- (1) *ze dvou reálných různoběžných přímek, právě když $h(A) = 2$ a $|\bar{A}| < 0$,*
- (2) *ze dvou komplexně sdružených různoběžných přímek, právě když $h(A) = 2$ a $|\bar{A}| > 0$,*
- (3) *ze dvou reálných rovnoběžných přímek, právě když $h(A) = 2, |\bar{A}| = 0$ a existují reálné body ležící na \mathcal{K} ,*
- (4) *ze dvou komplexně sdružených rovnoběžných přímek, právě když $h(A) = 2, |\bar{A}| = 0$ a neexistují reálné vlastní body ležící na \mathcal{K} ,*
- (5) *z jedné dvojnásobné přímky, právě když $h(A) = 1$.*

Věta 2.46. *Ke každé kuželosečce \mathcal{K} existuje nejméně jedna dvojice různých nevlastních bodů, které jsou vzhledem ke \mathcal{K} polárně sdruženy.*

Věta 2.47. *Nechť $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ je takový afinní repér, že vektory \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 určují dva nevlastní body polárně sdružené vzhledem ke kuželosečce \mathcal{K} . Potom vzhledem k tomuto afinnímu repéru je v rovnici kuželosečky \mathcal{K} $a_{12} = 0$.*

Věta 2.48. *Je-li počátek afinního repéru vlastním středem kuželosečky \mathcal{K} , je v rovnici \mathcal{K} vzhledem k tomuto afinnímu repéru $a_{13} = a_{23} = 0$.*

Důsledek 2.2. *Zvolíme-li nyní afinní repér tak, že počátek je středem kuželosečky a osy souřadné jsou sdružené průměry, má vzhledem k tomuto afinnímu repéru kuželosečka \mathcal{K} kanonickou rovnici*

$$\mathcal{K} : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (2.26)$$

Věta 2.49. *Jestliže regulární kuželosečka \mathcal{K} nemá žádný vlastní střed, můžeme zvolit afinní repér $\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ tak, že O leží na kuželosečce, \mathbf{e}_1 je směrový vektor tečny ke \mathcal{K} v bodě O a \mathbf{e}_2 je vektor určující nevlastní střed \mathcal{K} . Potom vzhledem k tomuto afinnímu repéru má \mathcal{K} homogenní rovnici tvaru*

$$x_1^2 + 2px_2x_3 = 0, \quad (2.27)$$

tj. nehomogenní rovnici

$$x^2 + 2py = 0. \quad (2.28)$$

Definice 2.42. Rovnici (2.27) nebo (2.28) kuželosečky \mathcal{K} budeme nazývat afinní kanonickou rovnici. Afinní repér, vzhledem ke kterému má kuželosečka \mathcal{K} kanonickou rovnici, budeme nazývat *polární afinní repér* kuželosečky \mathcal{K} .

Věta 2.50. (Afinní klasifikace kuželoseček) *Ke každé kuželosečce \mathcal{K} existuje takový afinní repér, že vzhledem k němu má \mathcal{K} jednu z následujících rovnic:*

(homogenní souřadnice)	(nehomogenní souřadnice)	
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$	$x^2 + y^2 + 1 = 0,$	(Ak1)
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$	$x^2 + y^2 - 1 = 0,$	(Ak2)
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$	$x^2 - y^2 - 1 = 0,$	(Ak3)
$x_1^2 + 2x_2x_3 = 0,$	$x^2 + 2y = 0,$	(Ak4)
$x_1^2 + x_2^2 = 0,$	$x^2 + y^2 = 0,$	(Ak5)
$x_1^2 - x_2^2 = 0,$	$x^2 - y^2 = 0,$	(Ak6)
$x_1^2 + x_3^2 = 0,$	$x^2 + 1 = 0,$	(Ak7)
$x_1^2 - x_3^2 = 0,$	$x^2 - 1 = 0,$	(Ak8)
$x_1x_3 = 0,$	<i>nelze vyjádřit,</i>	(Ak9)
$x_1^2 = 0,$	$x^2 = 0,$	(Ak10)
$x_3^2 = 0,$	<i>nelze vyjádřit.</i>	(Ak11)

Definice 2.43. Rovnici kuželosečky \mathcal{K} z Věty 2.50 budeme nazývat *afinní normální rovnici*. Afinní repér, vzhledem ke kterému má kuželosečka \mathcal{K} normální rovnici, budeme nazývat *normovaný polární afinní repér* kuželosečky \mathcal{K} .

Poznámka. Je vidět, že kuželosečka (Ak1) je imaginární elipsa, (Ak2) je reálná elipsa, (Ak3) je hyperbola, (Ak4) parabola, (Ak5) je dvojice komplexně sdružených tvořících různoběžných přímk, (Ak6) je dvojice reálných různoběžných přímk, (Ak7) je dvojice komplexně sdružených rovnoběžných přímk, (Ak8) je dvojice reálných rovnoběžných přímk, (Ak9) je tvořena jednou vlastní a jednou nevlastní tvořící přímkou, (Ak10) je dvojnásobná vlastní tvořící přímka a (Ak11) je dvojnásobná nevlastní tvořící přímka.

2.4.5 Metrické vlastnosti kuželoseček

V této kapitole uvažujeme \mathcal{E}_ϵ reálnou euklidovskou rovinu, $\mathcal{E}_2^\mathbb{C}$ její komplexní rozšíření a $\overline{\mathcal{E}_2^\mathbb{C}}$ projektivní rozšíření $\mathcal{E}_2^\mathbb{C}$. Jako kuželosečku v \mathcal{E}_ϵ potom rozumíme kuželosečku v $\overline{\mathcal{E}_2^\mathbb{C}}$.

Uvažujme na \mathcal{E}_ϵ kartézskou souřadnou soustavu určenou ortonormálním (kartézským) repérem

$$\langle O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle. \quad (2.29)$$

V indukovaných kartézských homogenních souřadnicích v \mathcal{E}_ϵ má kuželosečka \mathcal{K} obvyklou rovnici

$$\mathcal{K} : \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad (2.30)$$

a v nehomogenních kartézských souřadnicích (při častějším označení nehomogenních souřadnic $X = [x; y]$) má kuželosečka \mathcal{K} rovnici

$$\mathcal{K} : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0, \quad (2.31)$$

tj.

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (2.32)$$

nebo maticově, stejně jako v podkapitole 2.4.3,

$$\mathcal{K} : (\bar{X})^T \bar{A}(\bar{X}) + 2(\mathbf{a})^T(\bar{X}) + a = 0. \quad (2.33)$$

Úmluva. V praxi se setkáváme téměř výhradně s kuželosečkami, jejichž rovnice jsou zadány v nehomogenních souřadnicích. Takto se nedají bez dalšího upřesnění zadat kuželosečky, jejichž součástí je nevlastní přímka. Dále tedy budeme předpokládat, že žádná kuželosečka nemá za svou tvořící přímku nevlastní přímku. V souřadnicovém vyjádření to znamená, že matice \bar{A} je nenulová.

Definice 2.44. Směr určený nenulovým reálným vektorem \mathbf{u} se nazývá *hlavním směrem* kuželosečky \mathcal{K} , je-li vzhledem ke \mathcal{K} polárně sdružen s kolmým směrem.

Poznámka. Z Definice 2.44 vyplývá, že směr určující nevlastní singulární bod kuželosečky nebo nevlastní střed kuželosečky je hlavním směrem kuželosečky.

Věta 2.51. Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe navzájem kolmé hlavní směry. Má-li kuželosečka \mathcal{K} vzhledem k nějakému ortonormálnímu repéru souřadnicovou rovnici (2.33), jsou hlavní směry kuželosečky vlastními směry matice $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, tj. nenulový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ určuje hlavní směr kuželosečky \mathcal{K} právě tehdy, když pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 &= 0, \\ a_{12}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

nebo po úpravě

$$\begin{aligned}a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= \lambda u_1, \\a_{12}u_1 + a_{22}u_2 &= \lambda u_2.\end{aligned}$$

Poznámka. Charakteristická rovnice soustavy (2.34) je

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0, \quad (2.35)$$

jejíž diskriminant je $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. Z toho vyplývá, že charakteristická rovnice má vždy reálná řešení (je to obecná vlastnost všech symetrických matic, viz Věta 2.23).

Poznámka. Směr, který určuje nevlastní střed, je i hlavním směrem, který odpovídá hlavnímu číslu $\lambda = 0$. Opravdu z (2.25) vyplývá, že kuželosečka má nevlastní střed právě tehdy, je-li $|\vec{A}| = 0$ a tvar charakteristické rovnice (2.35) pak implikuje, že jedním hlavním číslem musí být 0. Z (2.24) a (2.34) potom plyne, že soustavy pro výpočet nevlastního středu a hlavního směru jsou totožné.

Věta 2.52. *Je-li P nevlastní nesesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky \mathcal{K} , pak poláru bodu P , pokud je to vlastní přímka, nazýváme osou kuželosečky \mathcal{K} . Je-li nevlastní bod hlavního směru kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, která je kolmá na tento hlavní směr. Vlastní průsečík kuželosečky s její osou se nazývá vrchol kuželosečky.*

Poznámka. Kuželosečka je osově (kolmo) symetrická podle každé své osy.

Poznámka. V případě, že každý směr je hlavním směrem kuželosečky, má kuželosečka nekonečně mnoho os. V tomto případě má kuželosečka právě jeden vlastní střed. To vyplývá z toho, že charakteristická rovnice má dvojnásobný nenulový kořen, tj. $|\vec{A}| \neq 0$, a tedy soustava (2.25) pro výpočet vlastních středů má právě jedno řešení. Potom každá reálná přímka procházející středem je osou symetrie kuželosečky, která má tedy nekonečně mnoho os symetrie. Takové kuželosečky budeme nazývat *zobecněné kružnice* a v následující Části 2.4.6 ukážeme, o které z kuželoseček se jedná.

Z definice osy kuželosečky vyplývá, že každá osa, která je polárou nesesingulárního nevlastního bodu (který není nevlastním středem kuželosečky), obsahuje všechny středy kuželosečky.

Regulární kuželosečka, která není zobecněnou kružnicí, může mít jednu osu (nevlastní přímka se dotýká kuželosečky – jde o parabolu), nebo dvě osy.

Singulární kuželosečka, která má právě jeden vlastní střed (dvojice různoběžných přímek reálných nebo komplexně sdružených), má vždy dvě osy.

V případě, že má kuželosečka přímku vlastních středů (dvojice rovnoběžných přímek nebo dvojnásobná přímka), je jedna osa přímka středů a druhá osa je libovolná kolmice na přímku středů. V tomto případě má tedy kuželosečka také nekonečně mnoho os symetrie.

Poznámka. Pokud není osa součástí kuželosečky (dvojnásobná vlastní přímka), leží na každé ose nejvýše dva vrcholy, které mohou být reálné různé, komplexně sdružené, nebo mohou splývat do jediného bodu (různoběžné přímky). V některých případech jsou průsečíky osy a kuželosečky nevlastní body, které za vrcholy nepočítáme. U paraboly je to jednonásobný nevlastní průsečík, u rovnoběžných přímek protíná osa, která je tvořena přímkou středů, nevlastní přímku v dvojnásobném singulárním bodě.

2.4.6 Metrická klasifikace kuželoseček

Afinní vlastnosti a klasifikace kuželoseček zůstávají zachovány i v euklidovské rovině. V této kapitole se seznámíme s rovnicemi kuželoseček zadaných v nehomogenních souřadnicích ve tvaru, který nám poskytne informace o jejich metrických vlastnostech.

Věta 2.53. *Nechť má kuželosečka \mathcal{K} alespoň jeden vlastní střed. Potom v kartézském repéru, jehož počátek je vlastním středem a směrové vektory jsou jednotkové vektory hlavních směrů kuželosečky \mathcal{K} , má \mathcal{K} rovnici tvaru*

$$\mathcal{K} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_{33} = 0, \quad (2.36)$$

kde $\lambda_i, i = 1, 2$, jsou hlavní čísla kuželosečky.

Důkaz. Protože směry souřadných os jsou polárně sdružené vzhledem ke \mathcal{K} , je $a_{12} = 0$ (viz Věta 2.47). Protože počátek souřadné soustavy je vlastním středem kuželosečky, je $a_{13} = a_{23} = 0$ (viz Věta 2.48) a dohromady tak dostáváme rovnici \mathcal{K} ve tvaru

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Protože je charakteristická rovnice kuželosečky nezávislá na ortonormálním repéru, je charakteristická rovnice kuželosečky $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$.

Věta 2.54. *Nechť regulární kuželosečka \mathcal{K} nemá vlastní střed (parabola). Potom volíme počátek kartézské souřadné soustavy jako průsečík \mathcal{K} s její osou a směrové vektory jako jednotkové vektory hlavních směrů kuželosečky \mathcal{K} . V této kartézské souřadné soustavě má \mathcal{K} rovnici tvaru*

$$\mathcal{K} : x^2 + 2py = 0 \quad (2.37)$$

Věta 2.55. (Metrická klasifikace kuželoseček) *Ke každé kuželosečce \mathcal{K} , která neobsahuje jako svou část nevlastní přímku, existuje takový ortonormální repér, že vzhledem k němu má \mathcal{K} jednu z následujících rovnic:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \quad a > 0, b > 0, \quad (\text{Mk1})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a > 0, b > 0, \quad (\text{Mk2})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a > 0, b > 0, \quad (\text{Mk3})$$

$$x^2 + 2py = 0, \quad p \neq 0, \quad (\text{Mk4})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a > 0, b > 0, \quad (\text{Mk5})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a > 0, b > 0, \quad (\text{Mk6})$$

$$x^2 + c^2 = 0, \quad c > 0, \quad (\text{Mk7})$$

$$x^2 - c^2 = 0, \quad c > 0, \quad (\text{Mk8})$$

$$x^2 = 0, \quad (\text{Mk9})$$

kde a, b, c, p jsou reálná čísla.

Poznámka. Kladná čísla a, b v rovnicích (Mk1) – (Mk3) elipsy (imaginární i reálné) a hyperboly se nazývají *délky poloos* a pro osy kuželosečky, na kterých leží reálné vrcholy, udávají vzdálenost vrcholů od středu kuželosečky.

Pro reálnou elipsu jsou všechny vrcholy reálné a větší z čísel a, b se nazývá *délkou hlavní poloosy*, menší se nazývá *délkou vedlejší poloosy*. Vrcholy elipsy, jejichž vzdálenost od středu elipsy je rovna délce hlavní poloosy, se nazývají *hlavní vrcholy elipsy*, vrcholy elipsy, jejichž vzdálenost od středu elipsy je rovna délce vedlejší poloosy, se nazývají *vedlejší vrcholy elipsy*.

Pro hyperbolu s rovnicí (Mk3) jsou vrcholy na ose x reálné a nazývají se *hlavní vrcholy hyperboly*, číslo $a > 0$ se nazývá *délka hlavní poloosy*. Vrcholy na ose y jsou komplexně sdružené. Reálné body na ose y , jejichž vzdálenost od počátku (středu hyperboly) je rovna b , jsou *reální zástupci vrcholů* a nazývají se *vedlejší vrcholy*, číslo b se nazývá *délka vedlejší poloosy*. Vedlejší vrcholy si můžeme snadno představit jako body, které jsou hlavními vrcholy takzvané *doplňkové hyperboly*, což je hyperbola, která má stejné osy i asymptoty a hlavní osa původní hyperboly je vedlejší osou doplňkové hyperboly. Má-li původní hyperbola rovnici (Mk3), potom doplňková hyperbola má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Případ, kdy $a = b$ v rovnicích (Mk1), (Mk2) a (Mk5), nastává při $\lambda_1 = -\lambda_2$, tj. pro *zobecněnou kružnici*. Potom (Mk1) je rovnice *imaginární kružnice*, (Mk2) je rovnice *reálné kružnice* a (Mk5) je rovnice takzvané *nulové kružnice* (reálná kružnice s nulovým poloměrem).

Je-li $a = b$ v rovnici (Mk3), což nastává v případě, kdy $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, nazývá se příslušná hyperbola *rovnoosá* (v tomto případě je doplňková hyperbola shodná s původní, jen je otočená kolem středu o $\frac{\pi}{2}$). Pro $a = b$ v rovnici (Mk6) dostáváme dvě kolmé různoběžné reálné přímky.

Číslo 2 c v rovnici (Mk8) udává vzdálenost rovnoběžných přímek, které jsou tvořícími přímkami kuželosečky.

Číslo p v rovnici (Mk4) paraboly se nazývá *parametr paraboly*. Jeho geometrický význam si ukážeme v podkapitole 2.4.8.

2.4.7 Klasifikace kuželoseček pomocí invariantů

V této části popíšeme číselné hodnoty přiřazené koeficientům matice kuželosečky, které jsou nezávislé na zvoleném souřadnicovém repéru. Takováto čísla se nazývají *invarianty kuželosečky* a využívají se zvláště při klasifikaci kuželosečky \mathcal{K} zadané pomocí obecné rovnice v nehomogenních kartézských souřadnicích

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.38)$$

Kromě klasifikace kuželosečky \mathcal{K} (bez nutnosti převádění obecné rovnice na rovnici kanonickou) se dá invariantů kuželosečky také s výhodou užít při stanovení metrických a polohových vlastností kuželosečky (tj. například *délek poloos*, *souřadnic středu* či *natočení* kuželosečky oproti hlavní souřadné ose). Výpočtem těchto veličin pomocí invariantů se pak budeme více zabývat v podkapitole 3.4.

Poznámka. Invarianty kuželosečky (společně s hlavními čísly kuželosečky) se také dají použít ke snadnému nalezení kanonické rovnice této kuželosečky. Při výpočtu ovality extrudovaného vlákna však nemá tato problematika využití, a proto se jí zde nebudeme věnovat (převádění obecné rovnice kuželosečky na její kanonický tvar je detailně popsáno např. v [2]).

Definice 2.45. Necht \mathcal{K} je kuželosečka o rovnici (2.38). Reálná funkce $I(a_{ij})$ se nazývá *invariantem kuželosečky \mathcal{K}* , jsou-li její hodnoty nezávislé na zvoleném souřadnicovém repéru. Řekneme, že invariant $I(a_{ij})$ je *stupně l* , je-li $I(\alpha a_{ij}) = \alpha^l I(a_{ij})$. Pro $l = 0$ hovoříme o *absolutním invariantu*.

Poznámka. V předchozích úvahách jsme se již s několika invarianty kuželosečky setkali. Např. hodnota kuželosečky nezávisí na libovolných použitých souřadnicích. Je to tedy invariant kuželosečky v projektivní, afinní i euklidovské rovině (navíc se jedná o invariant absolutní). Podobně hodnota matice \bar{A} je absolutní invariant v afinní rovině. Všude dále, pokud budeme hovořit o invariantech, budeme mít na mysli invarianty v euklidovské rovině, tj. uvažované souřadnicové repéry budou ortonormální.

Poznámka. Stupeň invariantu určuje, jak se jeho hodnota mění při změně určující kvadratické formy. Je-li I hodnota invariantu při použití určující kvadratické formy F , pak $\alpha^l I$ je hodnota téhož invariantu stupně l při použití kvadratické formy αF .

Poznámka. V předchozí podkapitole 2.4.5 jsme zmínili, že charakteristická rovnice je nezávislá na zvoleném ortonormálním repéru. To ovšem znamená, že její kořeny i koeficienty jsou (euklidovské) invarianty kuželosečky. Koeficienty charakteristické rovnice jsou čísla $a_{11} + a_{22}$ a $|\bar{A}|$. Je tedy $I(a_{ij}) = a_{11} + a_{22}$ invariantem stupně 1 a $I(a_{ij}) = |\bar{A}|$ je invariantem stupně 2. Podobně hlavní čísla kuželosečky jsou invarianty stupně 1.

Věta 2.56. *Determinant matice kuželosečky (diskriminant kuželosečky) je jejím invariantem stupně 3.*

Abychom dokázali klasifikovat každou kuželosečku \mathcal{K} , jejíž součástí není nevlastní přímka, musíme kromě výše zmíněných invariantů použít ještě invariant jeden. Abychom ho získali, je potřeba zavést funkci Γ , která je závislá na hlavních číslech kuželosečky, tedy $\Gamma = \Gamma(\lambda)$. Vzhledem ke značení v rovnicích 2.38 a 2.33 ji můžeme definovat jako

$$\Gamma(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda E_2 & (\mathbf{a}) \\ (\mathbf{a})^T & a \end{vmatrix} = \Gamma_0 \lambda^2 + \Gamma_1 \lambda + \Gamma_2, \quad (2.39)$$

kde

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= a_{33}, \\ \Gamma_1 &= a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \\ \Gamma_2 &= |\bar{A}|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Věta 2.57. *Funkce $\Gamma(\lambda)$ je invariantní při změnách ortonormálního repéru, které zachovávají počátek.*

Poznámka. Invariant, který jsme pomocí funkce Γ chtěli nalézt, je Γ_1 v rovnici 2.40. Γ_1 je skutečně invariantní při změnách ortonormálního repéru, které zachovávají počátek, při změnách počátku ovšem invariantní být nemusí, a proto se někdy označuje jako *semiinvariant kuželosečky \mathcal{K}* . [2, 4]

Při klasifikaci kuželosečky \mathcal{K} , jejíž součástí není nevlastní přímka, použijeme invariant stupně 1 $I(a_{ij}) = a_{11} + a_{22}$ (jedná se o stopu matice \bar{A} , budeme dále značit $T = a_{11} + a_{22}$), invariant stupně 2 $I(a_{ij}) = |\bar{A}|$, invariant stupně 3 $I(a_{ij}) = |\bar{A}|$ a semiinvariant kuželosečky Γ_1 . Přehled klasifikace nám nabízí následující věta.

Věta 2.58. (Klasifikace kuželoseček pomocí invariantů) Kuželosečka \mathcal{K} , která nemá jako svou součást nevlastní přímku, se dá klasifikovat pomocí invariantů T , $|\bar{A}|$, $|A|$ a Γ_1 tímto způsobem:

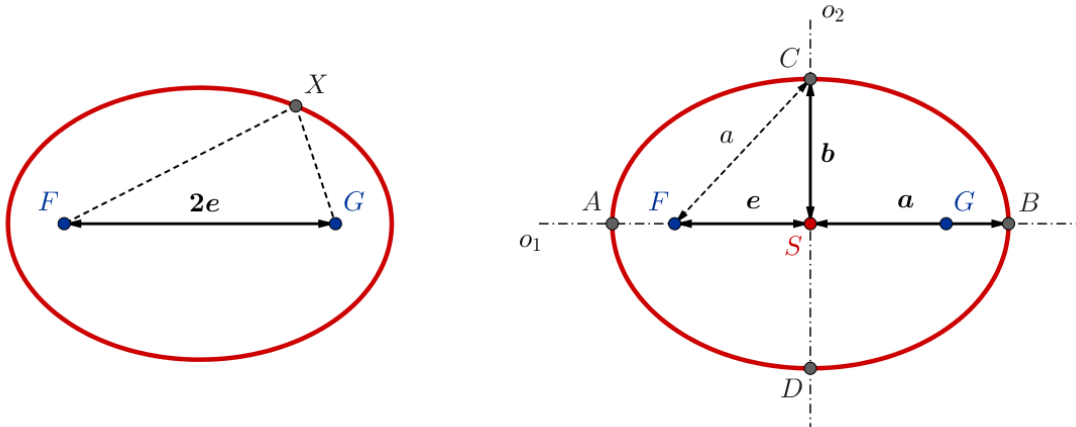
Rozdělení kuželoseček	$ \bar{A} \neq 0$		$ \bar{A} = 0$		
	$ \bar{A} > 0$	$ \bar{A} < 0$			
$ A \neq 0$	$ A T < 0$ <i>reálná elipsa</i>	<i>hyperbola</i>	<i>parabola</i>		
	$ A T > 0$ <i>imaginární elipsa</i>				
$ A = 0$	<i>imaginární různoběžky</i>	<i>reálné různoběžky</i>	$\Gamma_1 < 0$ <i>reálné rovnoběžky</i>	$\Gamma_1 = 0$ <i>dvojnásobná přímka</i>	$\Gamma_1 > 0$ <i>imaginární rovnoběžky</i>

(převzato z [4] a upraveno dle [5])

2.4.8 Kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností

Na střední škole se pracuje pouze s reálnou euklidovskou rovinou. Kuželosečky se definují jako množiny bodů, které splňují jisté vlastnosti. V této části si ukážeme, že středoškolské definice kuželoseček určují opravdu reálné části kuželoseček v našem pojetí.

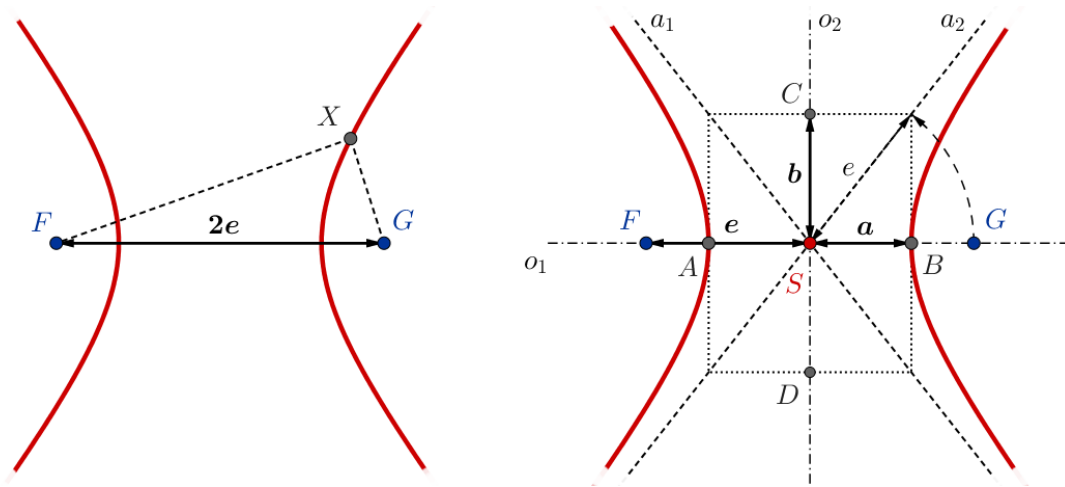
Věta 2.59. *Nechť F a G jsou dva různé body v \mathcal{E}_2 a označme $|FG| = 2e$. Nechť reálné číslo a je takové, že $a > e$. Potom množina bodů X v \mathcal{E}_2 takových, že $|FX| + |GX| = 2a$, je reálná část (reálné) elipsy s délkami poloos a a $b = \sqrt{a^2 - e^2}$.*



Obrázek 4: Popis elipsy

Poznámka. Body F, G z předchozí věty se nazývají *ohniska elipsy*, bod S je *střed elipsy*. Číslo e se nazývá *délková excentricita (výstřednost) elipsy*. Přímký o_1 , respektive o_2 , se nazývají *hlavní*, respektive *vedlejší osa elipsy*. Body A, B , respektive C, D , nazýváme *hlavní*, respektive *vedlejší vrcholy elipsy*.

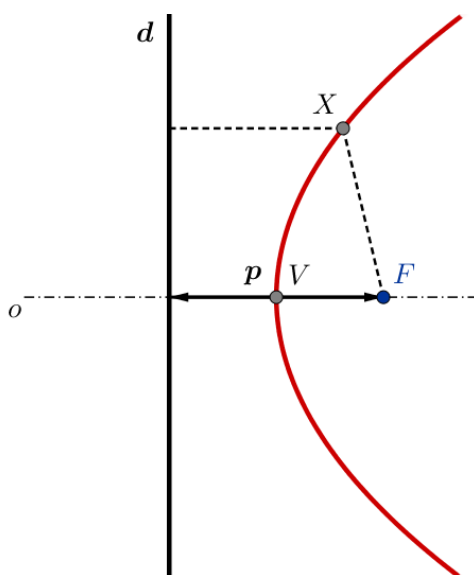
Věta 2.60. *Nechť F a G jsou dva různé body v \mathcal{E}_2 a označme $|FG| = 2e$. Nechť reálné číslo a je takové, že $a < e$. Potom množina bodů X v \mathcal{E}_2 takových, že $||FX| - |GX|| = 2a$, je reálná část hyperboly s délkou hlavní poloosy a a délkou vedlejší poloosy $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.*



Obrázek 5: Popis hyperboly

Poznámka. Body F, G z předchozí věty se nazývají *ohniska hyperboly*, bod S je *střed hyperboly*. Číslo e se nazývá *délková excentricita (výstřednost) hyperboly*. Přímký o_1 , respektive o_2 , se nazývají *hlavní, respektive vedlejší osa hyperboly*. Body A, B nazýváme *hlavní vrcholy hyperboly* a body C, D *vedlejší vrcholy hyperboly* (též *reální zástupci vrcholů*). Přímký a_1, a_2 nazveme *asymptoty hyperboly*.

Věta 2.61. *Nechť F je bod a d je přímka v \mathcal{E}_2 taková, že $F \notin d$, $v(F, d) = p$. Potom množina bodů X v \mathcal{E}_2 takových, že $|FX| = v(X, d)$, je reálná část paraboly s parametrem p .*

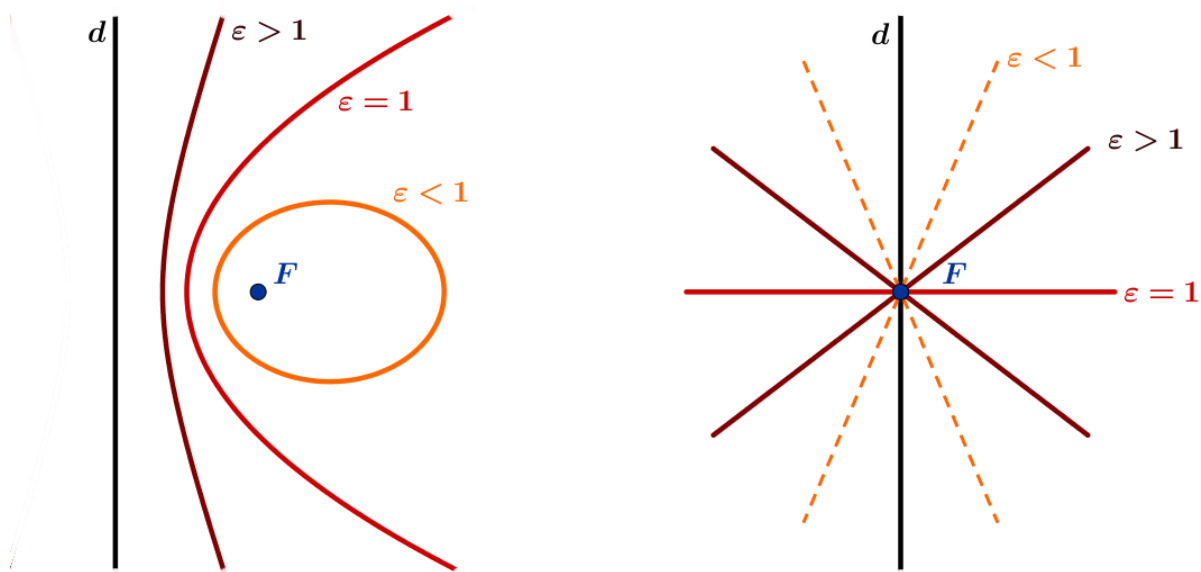


Obrázek 6: Popis paraboly

Poznámka. Bod F z předchozí věty se nazývá *ohnisko paraboly* a přímka d se nazývá *řídící přímka paraboly* (též *direktrix*). Číslo $p = v(F, d)$ je *parametr paraboly*, přímka o pak *osa paraboly* a bod V *vrchol paraboly*.

Věta 2.62. *Nechť F je bod a d je přímka v \mathcal{E}_2 a nechť $\varepsilon > 0$ je reálné číslo. Potom množina bodů X v \mathcal{E}_2 takových, že $|FX| = \varepsilon v(X, d)$, je reálná část kuželosečky, která je*

- reálnou elipsou, jestliže $F \notin d$ a $\varepsilon < 1$,*
- parabolou, jestliže $F \notin d$ a $\varepsilon = 1$,*
- hyperbolou, jestliže $F \notin d$ a $\varepsilon > 1$,*
- komplexně sdruženými různoběžkami, jestliže $F \in d$ a $\varepsilon < 1$,*
- dvojnásobnou přímkou, jestliže $F \in d$ a $\varepsilon = 1$,*
- dvojicí reálných různoběžek, jestliže $F \in d$ a $\varepsilon > 1$.*



Obrázek 7: Kuželosečky podle číselné excentricity

Poznámka. Je-li $F \notin d$, nazývá se bod F z předchozí věty *ohnisko kuželosečky* a přímka d se nazývá *řídící přímka kuželosečky*. Řídící přímka je pak polárou příslušného ohniska. Číslo $p = v(F, d)$ se nazývá *parametr kuželosečky*. Číslo ϵ se nazývá *číselnou (numerickou) excentricitou (výstředností) kuželosečky*.

3 VÝPOČET OVALITY

Jak už bylo naznačeno v kapitole 1, regulární kuželosečku v euklidovské rovině \mathcal{E}_2 je možné určit např. pomocí pěti různých přímk, které se jí dotýkají nebo z pěti různých bodů, kterými kuželosečka prochází (viz Věta 2.29). Z takových pětic prvků ale obecně nelze kuželosečku určit jednoznačně, následující podkapitola proto popisuje podmínky nutné k jednoznačnosti určení.

3.1 Podmínky jednoznačného určení kuželosečky

Tato podkapitola čerpá převážně z [6]. Není-li uvedeno jinak, pak věty zde zmíněné (i když někdy v lehce upraveném znění) pochází právě odsud.

Věta 3.1. *Regulární kuželosečka v \mathcal{E}_2 je jednoznačně určena pěti různými body v \mathcal{E}_2 , kterými tato kuželosečka prochází, jestliže žádné tři z nich neleží na jedné přímce.*

Věta 3.2. *Regulární kuželosečka v \mathcal{E}_2 je jednoznačně určena pěti různými přímkami v \mathcal{E}_2 , které se této kuželosečce dotýkají, jestliže se žádné tři z nich neprotínají v jednom bodě.*

Poznámka. Můžeme si všimnout, že předchozí dvě věty mezi sebou vykazují určitou analogii týkající se vztahu bodů a přímk. Tato analogie není náhodná a je projevem obecnější zákonitosti nazývané *princip duality*.

Věta 3.3. (Princip duality) *Mějme projektivní rovinu \mathcal{C} definovanou jako incidenční strukturu ve smyslu množiny P bodů, množiny L přímk a incidenčního vztahu I popisujícího, který bod leží na které přímce. Záměnou bodů a přímk ve vztahu*

$$\mathcal{C} = (P, L, I)$$

dostáváme projektivní rovinu \mathcal{C}^ duální k \mathcal{C} popsanou jako*

$$\mathcal{C}^* = (L, P, I^*),$$

kde I^ je relace inverzní k I . Pokud jsou \mathcal{C} a \mathcal{C}^* izomorfní, nazveme projektivní rovinu \mathcal{C} autoduální. Jestliže je V věta platná v autoduální projektivní rovině \mathcal{C} , pak v \mathcal{C} existuje a platí i věta V^* duální k větě V . [7]*

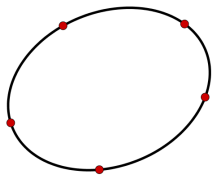
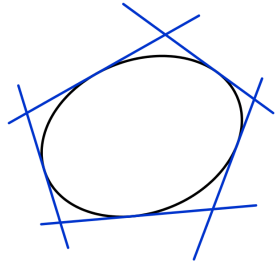
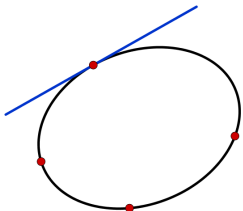
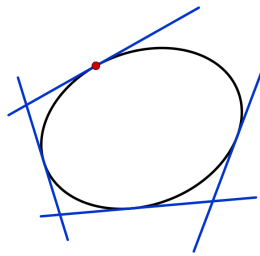
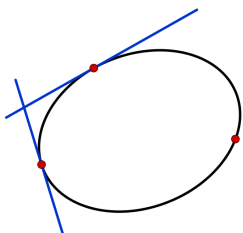
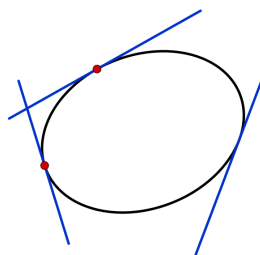
Protože reálná projektivní rovina \mathcal{P}_2 je autoduální, můžeme říct, že princip duality platí i na \mathcal{E}_2 . [7]

Regulární kuželosečku nemusíme ovšem určovat pouze pomocí pětice stejných prvků, lze to provést také použitím různých kombinací m bodů a n tečných přímk, pokud $m + n = 5$. Díky principu duality pak můžeme formulovat následující dvě věty.

Věta 3.4. *Regulární kuželosečka v \mathcal{E}_2 je jednoznačně určena tečnou s bodem dotyku a třemi dalšími různými body, které neleží na jedné přímce. Duálně lze říci, že regulární kuželosečka v \mathcal{E}_2 je jednoznačně určena tečnou s bodem dotyku a třemi dalšími různými tečnami, které se neprotínají v jednom bodě.*

Věta 3.5. *Regulární kuželosečka v \mathcal{E}_2 je jednoznačně určena dvěma různými tečnami s body dotyku a jedním dalším bodem. Duálně lze říci, že regulární kuželosečka v \mathcal{E}_2 je jednoznačně určena dvěma různými tečnami s body dotyku a jednou další tečnou.*

Poznatky z předešlých vět jsou znázorněny v následující tabulce:

PRIMÁRNĚ	DUÁLNĚ
<p>5 bodů</p> 	<p>5 tečen</p> 
<p>3 body + 1 tečna s bodem dotyku</p> 	<p>3 tečny + 1 tečna s bodem dotyku</p> 
<p>1 bod + 2 tečny s body dotyku</p> 	<p>1 tečna + 2 tečny s body dotyku</p> 

Tabulka 1: Způsoby jednoznačného určení regulární kuželosečky
(převzato z [6] a upraveno)

Protože už víme, jaké podmínky musí nastat pro jednoznačné určení regulární kuželosečky, můžeme tuto znalost použít k určení pomocných elips, o kterých se zmiňovala kapitola 1. V dalším se tedy budeme zabývat tím, jak analyticky získat jejich koeficienty z dostupných informací. Způsoby, jak toto provést za předpokladu, že známe ke každé pomocné elipse pětici různých tečen, jsou různé, my se ovšem zaměříme na dva: první je tzv. *geometricky-analytický přístup* a druhý, který nazýváme *ryze analytický přístup*.

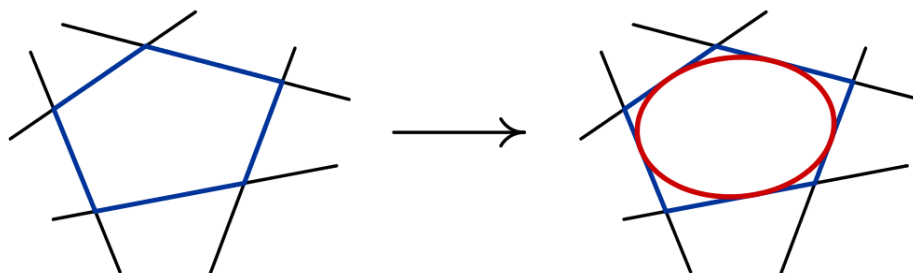
3.2 Geometricky-analytický přístup

3.2.1 Popis metody

Tento způsob nezjišťuje koeficienty pomocné elipsy přímo z parametrických rovnic pětice optických tečen, ale pro jejich určení používá body, kde se elipsa s těmito tečnami stýká (*bodů dotyku*). K nalezení bodů dotyku nám pomohou následující dvě věty.

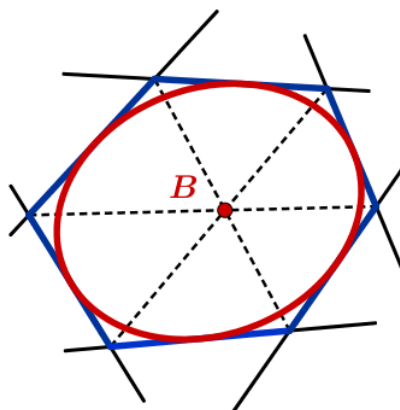
Věta 3.6. *Pro každý konvexní nedegenerovaný pětiúhelník existuje právě jedna vepsaná elipsa. [8]*

Poznámka. Je důležité si uvědomit, že optické tečny právě takový pětiúhelník vytínají:



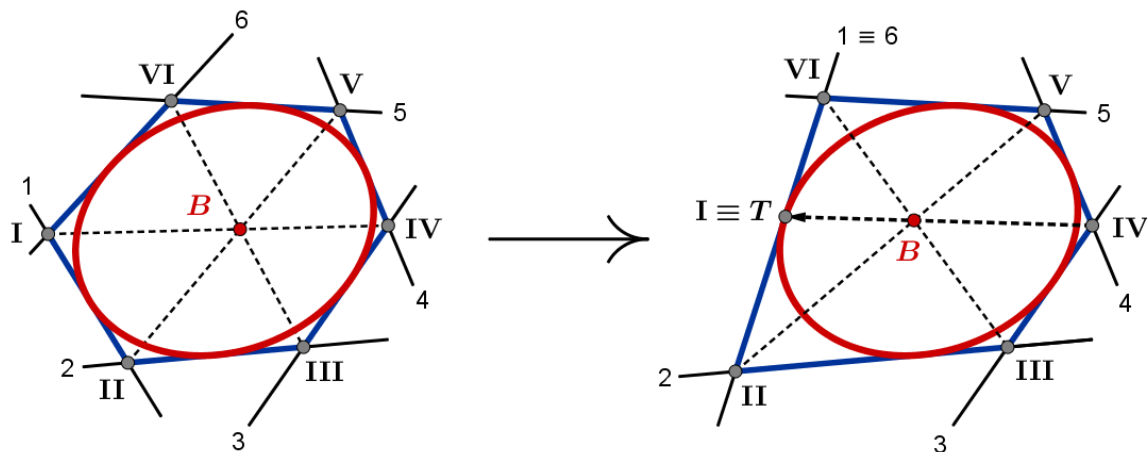
Tato skutečnost nám také později pomůže při hledání bodů dotyku.

Věta 3.7. (Brianchonova věta pro elipsu) *Jestliže konvexní šestiúhelník opisuje elipsu, pak jeho tři diagonály se protínají v jednom bodě. Naopak, pokud se všechny tři diagonály konvexního šestiúhelníku protínají v jednom bodě, pak existuje právě jedna elipsa jemu opsaná. [8]*



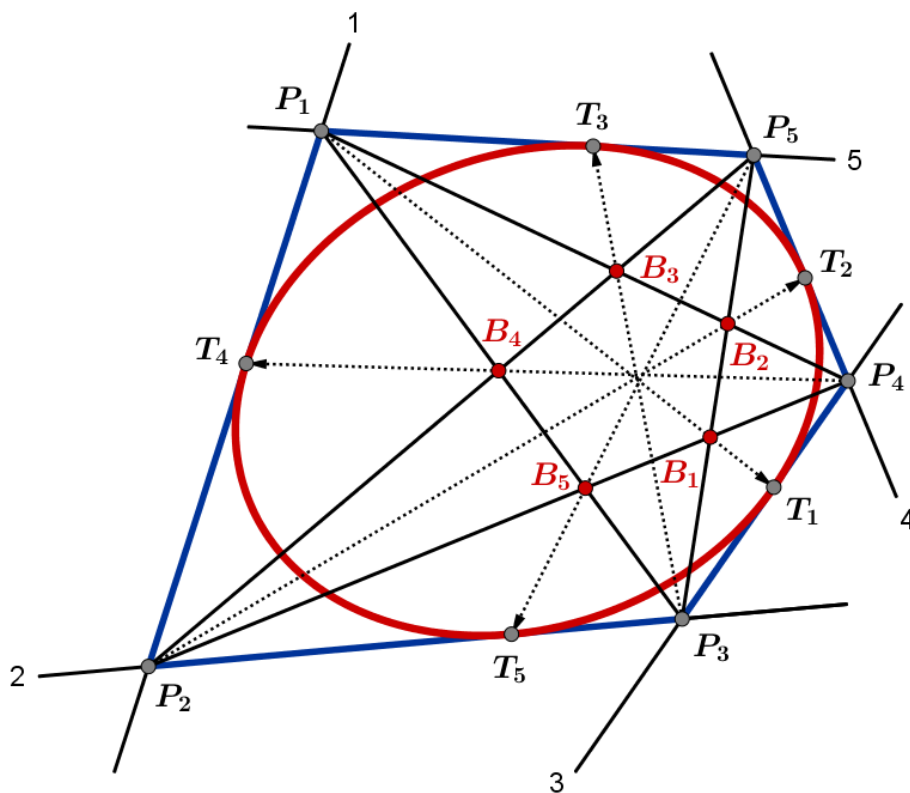
Poznámka. Bod z předchozí věty, ve kterém se protínají diagonály, nazýváme *Brianchonův bod*.

Brianchonova věta pro elipsu se sice vztahuje k šestiúhelníku, její limitní případ však skvěle poslouží k nalezení bodů dotyku. Označme nejprve vrcholy šestiúhelníku **I, II, III, IV, V, VI** a přímky, které těmito vrcholy prochází 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dále uvažujme, že dvě z těchto přímek (např. 1 a 6) splynou v jedinou přímku:



Dostáváme tedy konvexní pětiúhelník opsaný elipse. Z obrázku výše můžeme vidět, že po splnutí přímk 1 a 6 do přímky jedné došlo také ke splnutí vrcholu **I** s bodem dotyku T na této přímce.

Pokud tedy chceme geometricky určit místo dotyku optické tečny a pomocné elipsy, můžeme tak učinit pomocí průsečíků pětice optických tečen, které tvoří vrcholy konvexního pětiúhelníku. Po zvolení přímky, na které chceme najít bod dotyku, sestrojíme diagonály z vrcholů dvou přilehlých stran pětiúhelníku; jejich průsečík je Brianchonův bod pro zvolenou přímku. Bod, ve kterém pak protne spojnice tohoto Brianchonova bodu a protilehlého vrcholu pětiúhelníku zvolenou přímku, je hledaným bodem dotyku. Takto určíme tedy body dotyku na každé z optických tečen:



Obrázek 8: Nalezení bodů dotyku pomocí Brianchonovy věty

Touto konstrukcí nám uvnitř pětiúhelníku vznikne tzv. *diagonální pentagram*, jehož vnitřní průsečíky jsou Brianchonovými body. Vytvoříme-li spojnice těchto bodů a protějších vrcholů, pak protnutím příslušných stran dostáváme všech pět bodů dotyku.

Poznámka. Tento způsob hledání bodů dotyku za použití uvedených vět je typický zvláště pro elipsu. K nalézání bodů dotyku s obecnou kuželosečkou se dá užít i dalších konstrukcí a principů vycházejících z projektivní geometrie. Pro detailnější rozbor této problematiky viz [6].

3.2.2 Výpočet koeficientů pomocné elipsy

V této části si ukážeme, jak z pěti nalezených tečných bodů vypočítat koeficienty pomocné elipsy, a tím i její rovnici. Pomocná elipsa má stejně jako každá kuželosečka obecnou rovnici v nehomogenních kartézských souřadnicích tvaru

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (3.1)$$

Dále označme body dotyku nalezené v předchozí části a jejich nehomogenní kartézské souřadnice jako $T_i = [x_i; y_i]$ pro $i = 1, \dots, 5$. Protože každý bod dotyku je i prvkem pomocné elipsy, tedy $T_i \in \mathcal{K} \quad \forall i = 1, \dots, 5$, musí platit

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}x_2 + 2a_{23}y_2 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_3^2 + 2a_{12}x_3y_3 + a_{22}y_3^2 + 2a_{13}x_3 + 2a_{23}y_3 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_4^2 + 2a_{12}x_4y_4 + a_{22}y_4^2 + 2a_{13}x_4 + 2a_{23}y_4 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_{13}x_5 + 2a_{23}y_5 + a_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

anebo v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ 2a_{12} \\ a_{22} \\ 2a_{13} \\ 2a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Víme, že aby křivka vyjádřená rovnicí (3.1) byla vůbec kuželosečkou, musí být alespoň jeden z koeficientů kvadratické formy nenulový, tedy $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$. Z toho vidíme, že vektor koeficientů (a_{ij}) v maticové rovnici (3.3) je nenulový, tím pádem musí být matice soustavy vystupující v této rovnici (podobně jako v rovnici (2.15)) singulární, neboli

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Laplaceovým rozvojem determinantu z předchozí rovnice (3.4) podle prvního řádku dostáváme

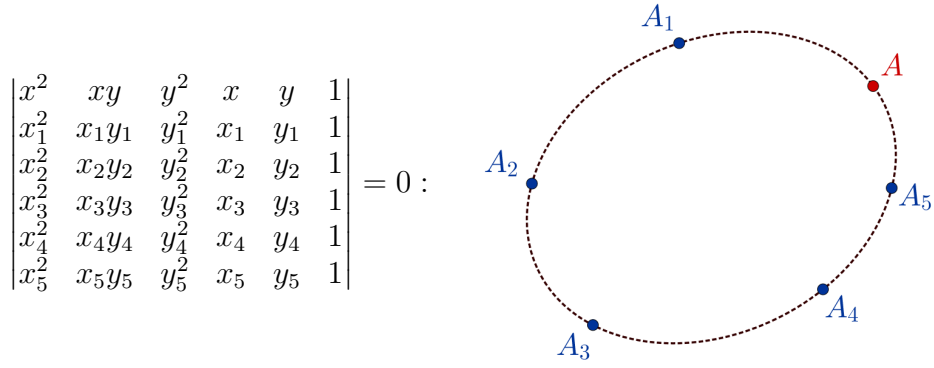
$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} x^2 + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} xy + \\
& + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} y^2 + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix} x + \\
& + (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix} y + (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix} 1 = 0.
\end{aligned}$$

V porovnání s rovnicí (3.1) můžeme vidět, že pomocí Laplaceova rozvoje jsme z determinantu výše dostali obecnou rovnici kuželosečky. Z tohoto porovnání tedy plyne přímý výpočet koeficientů pomocné elipsy:

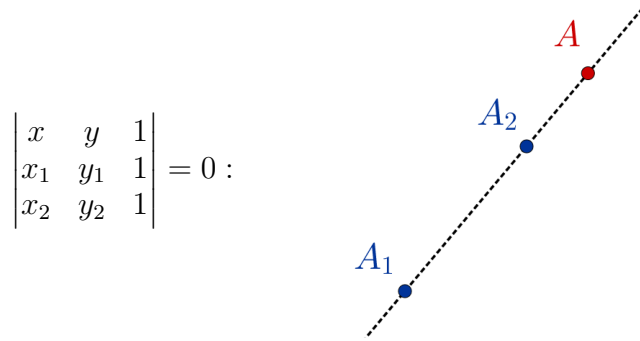
$$\begin{aligned}
a_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, & a_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
a_{22} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, & a_{13} &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
a_{23} &= (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, & a_{33} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Poznámka. Rovnice (3.4) vyjadřuje jednoznačné určení kuželosečky z pěti bodů v souladu s Větou 3.1. Dá se interpretovat tak, že k takovým pěti bodům $A_i = [x_i; y_i]$, $i = 1, \dots, 5$, které splňují předpoklady Věty 3.1, každý šestý obecný bod $A = [x; y]$ vyhovující této rovnici leží právě na jedné kuželosečce.

Podobně se dá interpretovat taky determinantová rovnice určující jednoznačně přímku pomocí dvou různých bodů $A_1 = [x_1; y_1]$, $A_2 = [x_2; y_2]$. [9]



Obrázek 9: Rovnice kuželosečky z pěti známých bodů



Obrázek 10: Rovnice přímky ze dvou známých bodů

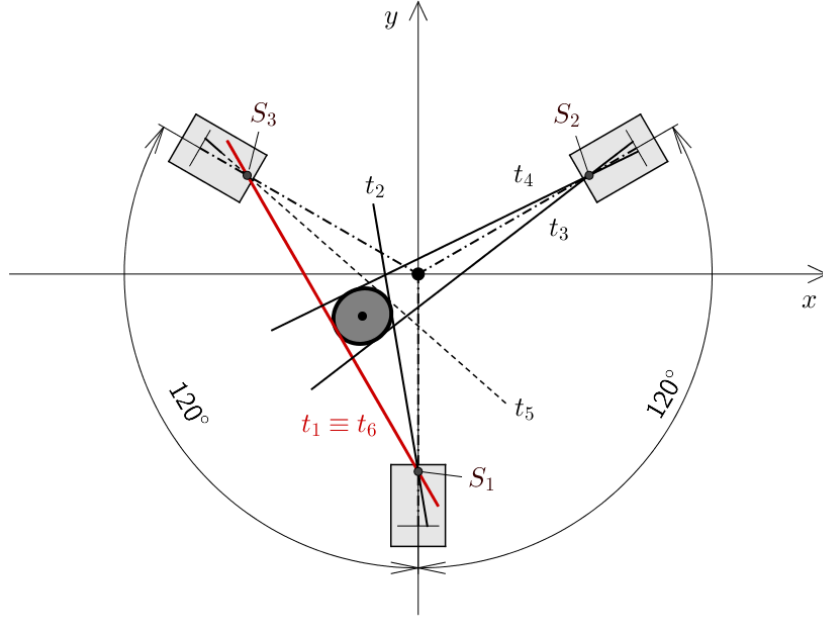
3.3 Ryze analytický přístup

3.3.1 Popis metody

Na rozdíl od geometricky-analytického přístupu, který převádí problém určení koeficientů pomocné elipsy z pěti optických tečen na úlohu výpočtu těchto koeficientů z pěti bodů dotyku, ryze analytický přístup zjišťuje tyto koeficienty pouze analyticky, a to pomocí parametrických rovnic optických tečen bez nutnosti hledání bodů dotyku.

Díky Větě 3.2 a uspořádání měřicí soustavy a zkoumaného vlákna, které předpoklady této věty zaručuje, můžeme říci, že pomocná elipsa určená pěticí optických tečen je těmito tečnami vždy určena jednoznačně.

Poznámka. Aby předpoklady Věty 3.2 nebyly splněny, musely by se alespoň tři z pěti optických tečen protínat v jednom bodě. Taková možnost je ale vzhledem k poloze a velikosti vlákna vůči vzdálenosti a poloze optických středů kamer vyloučena. Další případ nesplnění předpokladů zmíněné věty by byla situace, kdy alespoň dvě optické tečny splynou v jedinou přímku; to by se stalo v případě, že vlákno by se opticky dotýkalo spojnice dvou optických středů kamer, ani tento případ však nemůže z výše uvedených důvodů nastat.



Obrázek 11: Dvě splývající optické tečny

Z obrázku 11 výše vidíme, že z optických tečen t_1, t_2, t_3, t_4 a t_6 bychom v tomto případě pomocnou elipsu nemohli jednoznačně určit. I když se ale ve skutečnosti zkoumané vlákno vychyluje do stran, stále je navíjeno kladkou, a tím pádem setrvává v blízkém okolí středu soustavy, tento stav tedy nikdy nenastane.

3.3.2 Výpočet koeficientů pomocné elipsy

K analytickému určení koeficientů a_{ij} pomocné elipsy máme obecně k dispozici pětici přímek parametricky vyjádřených jako

$$\begin{aligned} p_1 : X_1 &= A_1 + r_1 \mathbf{v}_1, \\ p_2 : X_2 &= A_2 + r_2 \mathbf{v}_2, \\ p_3 : X_3 &= A_3 + r_3 \mathbf{v}_3, \\ p_4 : X_4 &= A_4 + r_4 \mathbf{v}_4, \\ p_5 : X_5 &= A_5 + r_5 \mathbf{v}_5, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $X_i, i = 1, \dots, 5$, je libovolný bod i -té přímky, $A_i, i = 1, \dots, 5$, je počáteční bod i -té přímky (v našem případě vždy jeden z optických středů kamer, tj. S_1, S_2 nebo S_3), $r_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, 5$ reálné číslo a $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 5$, směrový vektor i -té přímky.

Z těchto informací pak hledáme pomocnou elipsu ve tvaru obecné rovnice kuželosečky

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{3.6}$$

Protože přímky p_i jsou zadány parametricky a pomocnou elipsu se snažíme určit

v implicitním tvaru, převedeme vyjádření přímk ze soustavy 3.5 na obecné rovnice:

$$\begin{aligned} p_1 : k_1x + l_1y + m_1 &= 0, \\ p_2 : k_2x + l_2y + m_2 &= 0, \\ p_3 : k_3x + l_3y + m_3 &= 0, \\ p_4 : k_4x + l_4y + m_4 &= 0, \\ p_5 : k_5x + l_5y + m_5 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

kde $k_i, l_i, m_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, 5$, jsou reálná čísla.

Vzájemný vztah kuželosečky a tečny v obecném tvaru pak popisuje následující věta.

Věta 3.8. *Nechť $p : kx + ly + m = 0$ je přímka v \mathcal{E}_2 a*

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

je kuželosečka v \mathcal{E}_2 . Přímka p je pak tečnou kuželosečky \mathcal{K} právě tehdy, když

$$\begin{aligned} &(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)k^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)l^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)m^2 + \\ &+ 2(a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23})lm + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})km + 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})kl = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Idea důkazu. Vyjádříme-li přímku p v explicitním tvaru $y = f(x)$ (tj. $y = \frac{-kx-m}{l}$) a tento tvar následně dosadíme do rovnice kuželosečky \mathcal{K} , dostaneme kvadratickou rovnici v proměnné x :

$$x^2(a_{11} - 2a_{12}\frac{k}{l} + a_{22}\frac{k^2}{l^2}) + x(-2a_{12}\frac{m}{l} + 2a_{22}\frac{mk}{l^2} + 2a_{13} - 2a_{23}\frac{k}{l}) + a_{22}\frac{m^2}{l^2} - 2a_{23}\frac{m}{l} + a_{33} = 0$$

Z analytické geometrie víme, že přímka p je tečnou ke kuželosečce právě tehdy, když je determinant této kvadratické rovnice roven nule. Po několika algebraických úpravách by se nakonec došlo k řešení, které nám předkládá rovnost (3.8). V případě, že bychom nemohli přímku p vyjádřit ve směrnicovém tvaru (tj. jednalo by se o přímku bez směrnice), mohli bychom ji zapsat ve formě $x = g(y)$ a stejně jako v předchozím případě ji dosadit do rovnice kuželosečky. Důkaz by dále postupoval analogicky a došel ke stejnému výsledku. Pro celý důkaz viz [10].

Poznámka. Napíšeme-li determinant matice kuželosečky

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

je možné si všimnout, že členy vystupující v rovnosti (3.8) se rovnají subdeterminantům (*minorům*) 2. řádu tohoto determinantu. Rovnost (3.8) lze tedy přepsat jako

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} k^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} l^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} m^2 + \\ &+ 2 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{12} \end{vmatrix} lm + 2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} km + 2 \begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} kl = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Díky větě 3.8 a skutečnosti, že přímky p_i se dotýkají kuželosečky $\mathcal{K} \ \forall i = 1, \dots, 5$, platí

$$\begin{pmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2m_2 & k_2m_2 & k_2l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3m_3 & k_3m_3 & k_3l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4m_4 & k_4m_4 & k_4l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) \\ 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Význam této soustavy rovnic ukazuje následující věta.

Věta 3.9. *Je-li \mathcal{K} regulární kuželosečka a přímky $p_i, i = 1, \dots, 5$, takové, že platí soustava (3.10), pak je determinant matice této soustavy singulární, tj.*

$$\begin{vmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & k_1 m_1 & k_1 l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2 m_2 & k_2 m_2 & k_2 l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3 m_3 & k_3 m_3 & k_3 l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4 m_4 & k_4 m_4 & k_4 l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5 m_5 & k_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Důkaz. Stejně jako u soustavy (3.3) i zde plyne singularita matice soustavy z nenulovosti vektoru neznámých. Tento vektor je v našem případě vektorem minorů druhého řádu determinantu matice kuželosečky.

Jelikož se platnost věty vztahuje na regulární kuželosečku, stačí tento důkaz provést pro elipsu, hyperbolu a parabolu.

Pro elipsu a hyperbolu je nenulovost vektoru neznámých zaručena tím, že se jedná o středové kuželosečky; člen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ je totiž zároveň determinantem kvadratické formy kuželosečky (tj. $|\bar{A}|$), který rozhoduje o tom, zda má kuželosečka nějaký vlastní střed. Tento determinant je v případě elipsy a hyperboly nenulový, tudíž i vektor neznámých je nenulový.

V případě paraboly je důkaz o nenulovosti vektoru neznámých komplikovanější a provedeme ho sporem. Parabola je kuželosečka regulární, tzn. determinant její matice je různý od nuly ($|A| \neq 0$), a také kuželosečka středová, tedy determinant matice její kvadratické formy je nulový ($|\bar{A}| = 0$). Rozepíšeme-li zmíněné determinanty, pak musí pro parabolu platit

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 \neq 0 \quad \wedge \quad |\bar{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Pokud $|A|$ upravíme na tvar

$$|A| = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2$$

vidíme, že první člen takto rozepsaného determinantu $|A|$ musí být nulový, pro parabolu tedy dostáváme podmínky

$$2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 \neq 0 \quad \wedge \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \quad (3.12)$$

Budeme-li dále uvažovat všechny případy, pro které je vektor neznámých naopak roven nulovému vektoru, vyjdou nám tři možné sady řešení, pro které ukážeme spor s vlastnostmi paraboly, a tím platnost věty pro parabolu:

1. $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$:

Vzhledem k nulovosti všech koeficientů se nemůže jednat o parabolu (ani o jinou kuželosečku), navíc je toto řešení ve sporu s první podmínkou z výčtu (3.12).

2. $a_{11}a_{22} = a_{12}^2, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$:

Nulovost koeficientů a_{13}, a_{23} a a_{33} po dosazení nevyhovuje první podmínce z výčtu (3.12), nemůže se tedy jednat o parabolu a dostáváme spor.

3. $a_{11}a_{33} = a_{13}^2, a_{12}a_{33} = a_{13}a_{23}, a_{22}a_{33} = a_{23}^2, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R} :$

Po dosazení této sady řešení do první podmínky z výčtu (3.12) můžeme psát

$$\begin{aligned} 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 &= 2a_{12}^2a_{33} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33} = \\ &= 2a_{33}(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = -2a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Protože podle druhé podmínky z výčtu (3.12) musí být člen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, dostáváme spor. □

Učiníme-li Laplaceův rozvoj determinantu v rovnici (3.11) podle jeho prvního řádku, dostaneme

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2m_2 & k_2m_2 & k_2l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3m_3 & k_3m_3 & k_3l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4m_4 & k_4m_4 & k_4l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} k^2 + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} l^2 + \\ &+ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} m^2 + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} lm + \\ &+ (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} km + (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 \end{vmatrix} kl = 0. \end{aligned}$$

Z porovnání rovnice výše a rovnice (3.8) můžeme vidět, čemu se rovnají členy z vektoru neznámých v soustavě (3.10). Pokud zavedeme členy $D_i, i = 1, \dots, 6$ následujícím způsobem

$$\begin{aligned} D_1 &:= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix}, & D_2 &:= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix}, \\ D_3 &:= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix}, & D_4 &:= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, \\ D_5 &:= (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, & D_6 &:= (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pak musí platit

$$\begin{aligned}
a_{22}a_{33} - a_{23}^2 &= D_1, \\
a_{11}a_{33} - a_{13}^2 &= D_2, \\
a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= D_3, \\
a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} &= D_4, \\
a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} &= D_5, \\
a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} &= D_6,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

což je soustava šesti nelineárních rovnic pro šest neznámých $(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Když zavedeme pomocné členy

$$\begin{aligned}
Q &:= D_1D_2D_3 - D_1D_4^2 - D_2D_5^2 - D_3D_6^2 + 2D_4D_5D_6, \\
P_{11} &:= D_2D_3 - D_4^2, \\
P_{12} &:= D_3D_6 - D_4D_5, \\
P_{22} &:= D_1D_3 - D_5^2, \\
P_{13} &:= D_2D_5 - D_4D_6, \\
P_{23} &:= D_1D_4 - D_5D_6, \\
P_{33} &:= D_1D_2 - D_6^2,
\end{aligned}$$

pak má soustava (3.13) dvě sady řešení lišící se znaménkem ve tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \mp P_{11} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{12} &= \pm P_{12} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{22} &= \mp P_{22} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{13} &= \pm P_{13} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{23} &= \pm P_{23} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{33} &= \mp P_{33} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Podle soustavy (3.14) by tedy hledaná pomocná elipsa (či obecně regulární kuželosečka) měla rovnici

$$\mathcal{K} : \mp P_{11} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}x^2 \pm 2P_{12} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}xy \mp P_{22} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}y^2 \pm 2P_{13} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}x \pm 2P_{23} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}y \mp P_{33} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

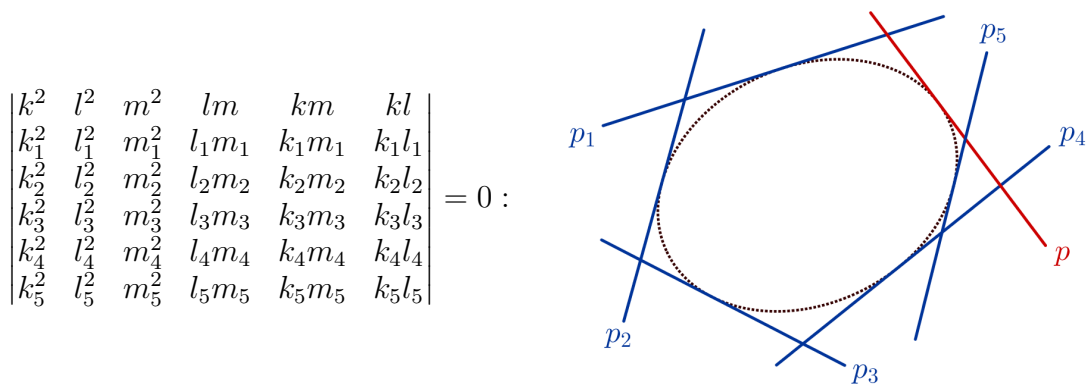
Pomocný člen $Q^{-\frac{1}{2}}$ ovšem může vycházet jako komplexní číslo a dále působit komplikace při výpočtu charakteristik kuželosečky. Po vynásobení zmíněné rovnice kuželosečky \mathcal{K} číslem $Q^{\frac{1}{2}}$ získáme novou rovnici

$$\mathcal{K} : \mp P_{11}x^2 \pm 2P_{12}xy \mp P_{22}y^2 \pm 2P_{13}x \pm 2P_{23}y \mp P_{33} = 0, \tag{3.15}$$

můžeme tedy použít jednu ze sad nových (reálných) koeficientů kuželosečky (a_{ij}^*) , pro které platí

$$\begin{aligned}
a_{11}^* &= \mp P_{11}, \\
a_{12}^* &= \pm P_{12}, \\
a_{22}^* &= \mp P_{22}, \\
a_{13}^* &= \pm P_{13}, \\
a_{23}^* &= \pm P_{23}, \\
a_{33}^* &= \mp P_{33}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

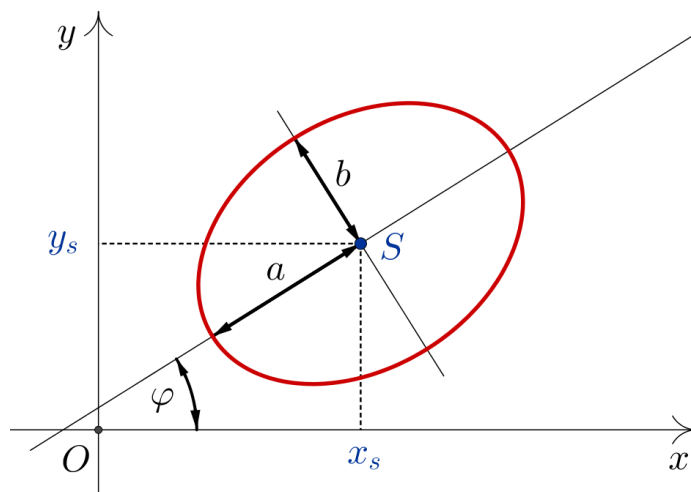
Poznámka. Rovnice (3.11) vyjadřuje jednoznačné určení kuželosečky z pěti tečen v souladu s Větou 3.2. Dá se interpretovat tak, že k takovým pěti přímkám $p_i : k_i x + l_i y + m_i = 0$, $i = 1, \dots, 5$, které splňují předpoklady Věty 3.2, se každá šestá obecná přímka $p : kx + ly + m = 0$ vyhovující této rovnici dotýká právě jedné kuželosečky.



Obrázek 12: Kuželosečka jako obálka přímek

3.4 Výpočet charakteristik pomocné elipsy z jejích koeficientů

Protože už dokážeme analyticky určit koeficienty pomocné elipsy (ať už jedním či druhým přístupem), ukážeme si v této kapitole, jak z nich vypočítat její *charakteristiky*, především *délku hlavní poloosy* a , *délku vedlejší poloosy* b , *polohu středu* $S = [x_s; y_s]$ a *úhel natočení* φ definovaný jako úhel mezi hlavní osou elipsy a kladnou částí hlavní souřadné osy.



Obrázek 13: Charakteristiky elipsy

Poloha středu S

Podle soustavy (2.25) musí pro souřadnice středu $S = [x_s; y_s]$ středové kuželosečky \mathcal{K} platit

$$\begin{aligned} a_{11}x_s + a_{12}y_s + a_{13} &= 0, \\ a_{12}x_s + a_{22}y_s + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

což je soustava lineárních rovnic pro dvě neznáme x_s, y_s a dá se vyjádřit v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Soustava lineárních rovnic v tomto tvaru se dá vyřešit např. pomocí Cramerova pravidla, dostáváme tedy

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ y_s &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Poznámka. Protože člen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ je zároveň determinantom kvadratické formy (tj. $|\bar{A}|$) kuželosečky \mathcal{K} , která je v našem případě středová, musí platit, že $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Výpočet podílem podle Cramerova pravidla ve vzorci (3.18) je tudíž korektní, pro středovou kuželosečku vždy použitelný a dá se přepsat pomocí invariantu $|\bar{A}|$ jako

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{|\bar{A}|} \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\bar{A}|} (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), \\ y_s &= \frac{1}{|\bar{A}|} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\bar{A}|} (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Délka hlavní poloosy a , délka vedlejší poloosy b

K výpočtu těchto veličin využijeme charakteristickou rovnici kuželosečky určenou vztahem (2.35) a invarianty kuželosečky z podkapitoly 2.4.7. Jestliže přepíšeme rovnici (2.35) pomocí těchto invariantů, dostáváme z původní tvaru

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$$

jeho novou formu

$$\lambda^2 - T\lambda + |\bar{A}| = 0. \quad (3.20)$$

Tato kvadratická rovnice má pak dvě řešení λ_1, λ_2 , kde $\lambda_1 \geq \lambda_2$:

$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4|\bar{A}|}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4|\bar{A}|}}{2}. \quad (3.21)$$

Pro druhé mocniny délek hlavní a vedlejší poloosy elipsy pak platí (viz např. [9])

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{1}{\lambda_2} \frac{|A|}{|\bar{A}|} = -\frac{|A|}{\lambda_1 \lambda_2^2}, \\ b^2 &= -\frac{1}{\lambda_1} \frac{|A|}{|\bar{A}|} = -\frac{|A|}{\lambda_1^2 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Po úpravě nakonec dostáváme ze vztahů (3.22) vzorce pro přímý výpočet a a b pomocí invariantů:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{2|A|}{|\bar{A}| \left(\sqrt{T^2 - 4|\bar{A}|} - T \right)}}, \\
b &= \sqrt{\frac{2|A|}{|\bar{A}| \left(-\sqrt{T^2 - 4|\bar{A}|} - T \right)}}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Úhel natočení φ

Pro výpočet úhlu natočení elipsy rozlišujeme čtyři způsoby výpočtu v závislosti na tom, jaké má kvadratická forma elipsa koeficienty: [11]

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{pro } a_{12} = 0, a_{11} < a_{22}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } a_{12} = 0, a_{11} > a_{22}, \\ \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} \right) & \text{pro } a_{12} \neq 0, a_{11} < a_{22}, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} \right) & \text{pro } a_{12} \neq 0, a_{11} > a_{22}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Poznámka. Ze vzorce (3.24) můžeme vidět, že natočení elipsy skutečně záleží jen na její kvadratické formě. Pro $a_{12} = 0$ dostáváme elipsu v tzv. *normální poloze*, tedy její hlavní a vedlejší poloosa jsou rovnoběžné s osami souřadnicového systému.

Závěr

Původními cíli práce bylo popsat problematiku měření ovality, nastudovat potřebný matematický aparát a vytvořit jednoúčelovou aplikaci umožňující odhadnout ovalitu extrudované vlákna.

Problematikou měření ovality se zabývaly především kapitoly 1 a 3. Kromě nástinu úlohy o měření ovality a schématického návodu k jeho provedení se kapitola 1 také zmínila o povaze extrudovaného vlákna (tj. jeho technických parametrech), jeho využití v praxi a v neposlední řadě rozvedla motivaci ke zjišťování jeho ovality. Mimoto také pojednala o principu fungování měřicího zařízení a jeho nedokonalostech a dále uvedla předpokládané zjednodušení modelu, se kterým tato práce kalkuluje.

Kapitola 2 se snažila obsáhnout většinu matematických poznatků z lineární algebry a projektivní geometrie potřebných k řešení problému měření ovality vlákna. Vzhledem k faktu, že skutečný nedokonalý průřez zkoumaného vlákna je v práci aproximován pomocí průřezu eliptického tvaru, směřovala celá tato kapitola k výstavbě analytické teorie kuželoseček. Její první podkapitoly pojednávající o vektorových, afinních a projektivních prostorech a dále o bilineárních a kvadratických formách tedy posloužily především jako základ pro korektní zavedení pojmu kuželosečky v analytickém smyslu.

Největší praktický přínos má pak kapitola 3, která se zabývá samotným výpočtem ovality vlákna a popisuje dva přístupy, jak tento výpočet realizovat. Využívá závěrů nabytých v předchozích kapitolách, rozvádí je a zmiňuje další věty z teorie kuželoseček a projektivní geometrie následně užité v příslušných výpočetních přístupech. Obecné závěry z analytické teorie kuželoseček aplikuje na elipsu, a tím ukazuje způsoby, jak vypočítat její charakteristiky (tj. zvláště *délku hlavní a vedlejší poloosy*, případně *polohu středu* a její *úhel natočení* vůči souřadné soustavě).

Začátek této kapitoly shrnuje podmínky jednoznačného určení kuželosečky pomocí pěti známých různých prvků v rovině (tj. pěti bodů, kterými kuželosečka prochází, pěti přímk, kterých se kuželosečka dotýká anebo pomocí kombinované pětice bodů a tečných přímk). Díky těmto určujícím podmínkám a *principu duality* bylo možné dále ukázat, jak lze analyticky určit obecnou rovnici kuželosečky z pěti bodů či naopak z pěti tečen. V textu je ukázáno odvození těchto vztahů a důkazy (či ideje důkazů) jejich platnosti. Nutno dodat, že autorovi známá česká literatura se zabývá určením kuželoseček pomocí těchto prvků spíše konstruktivně a analytickému výpočtu rovnice kuželosečky se vyhýbá. I když analytické určení obecné rovnice kuželosečky z pěti bodů v rovině je v zahraniční literatuře někdy popsáno, tak nelze nezmínit, že početnímu určení rovnice kuželosečky z pěti tečných přímk se literatura prakticky nevěnuje. V práci jsou oba tyto vztahy popsány, čímž text šel za hranici původně vytyčených cílů.

V příloze pak lze najít aplikaci, která ovalitu vlákna odhaduje včetně návodu na její použití a poznámek.

V případě, že by soustava uzpůsobená k měření ovality extrudovaného vlákna byla přesně seřízena a na senzorech kamer nedocházelo ke geometrickému zkreslení, pak by způsoby výpočtu ovality popsané v této práci měly na reálných datech fungovat přesně. Odchylka takto naměřených dat od skutečných hodnot už ale není součástí tohoto textu a může být předmětem další studie.

Literatura

- [1] ŠTARHA, P.; RAUDENSKÝ, M.; Vysoké učení technické v Brně, Brno, CZ: *Zařízení ke kontrole extrudovaného vlákna*. 304447, patent. (2014)
- [2] JANYŠKA, Josef a Anna SEKANINOVÁ. *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*. Brno: Masarykova univerzita, 1996. ISBN 8021014350.
- [3] HORÁK, Pavel a Josef JANYŠKA. *Analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 802101623X.
- [4] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: Teoretická část*. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005. ISBN 8021431008.
- [5] Kuželosečka. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-05-04]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Ku%C5%BElose%C4%8Dka>
- [6] STŘECHOVÁ, Ludmila. *Projektivní geometrie kuželoseček*. Brno, 2013. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.
- [7] Duality (projective geometry). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-05-14]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Duality\\$\(projective\\$geometry\)#Principle\\$_of\\$_Duality](https://en.wikipedia.org/wiki/Duality$(projective$geometry)#Principle$_of$_Duality)
- [8] AGARWAL, Mahesh, John CLIFFORD a Michael LACHANCE. Duality and Inscribed Ellipses. *Computational Methods and Function Theory* [online]. 2015, 15(4), 635-644 [cit. 2017-05-18]. Dostupné z: <http://www-personal.umd.umich.edu/~mkagarwa/PPDualityInscribedEllipses.pdf>
- [9] KORN, Granino A. a Theresa M. KORN. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Dover ed. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. ISBN 0486411478.
- [10] VOSSLER, Donald L. *Exploring analytic geometry with Mathematica*. 1. San Diego: Academic Press, c2000. ISBN 0127282564.
- [11] WEISSTEIN, Eric W. *Ellipse* [online]. Champaign (Illinois): MathWorld, c2017 [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html>

Seznam použitých zkratk a symbolů

\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
\mathbb{T}	číselné těleso
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$	reálná složka komplexního čísla z , imaginární složka komplexního čísla z
V, \bar{V}	reálný vektorový prostor, k němu komplexně sdružený vektorový prostor
$V^{\mathbb{C}}$	komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru
$\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$	vektor, k němu komplexně sdružený vektor
\mathbf{o}, \mathbf{e}	nulový vektor, jednotkový vektor
\overrightarrow{AB}	vektor z bodu A do bodu B
V_n	n -rozměrný reálný vektorový prostor
\mathcal{P}_n	n -rozměrný projektivní prostor nad tělesem \mathbb{T}
$\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$	množina všech jednodimenzionálních podprostorů prostoru V_n
$X = (x_1; x_2; x_3)$	bod dvourozměrného projektivního prostoru zadaný v homogenních projektivních souřadnicích
\mathcal{A}	reálný afinní prostor
$\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$	komplexní rozšíření reálného afinního prostoru
$\bar{\mathcal{A}}_n$	projektivní rozšíření reálného n -rozměrného afinního prostoru
$\bar{\mathcal{A}}_n^{\mathbb{C}}$	projektivní rozšíření $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$
\mathcal{N}	nadrovina nevlastních bodů
$\mathcal{E}_{\epsilon}, \mathcal{E}_2$	reálná euklidovská rovina
$A = [x; y]$	bod euklidovské roviny zadaný v nehomogenních kartézských souřadnicích
$f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	bilineární forma vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y}
$f^{\mathbb{C}}$	komplexní rozšíření reálné bilineární formy f
$F(\mathbf{x})$	kvadratická forma vektoru \mathbf{x}
$F^{\mathbb{C}}$	komplexní rozšíření reálné kvadratické formy F
A_f, A_F	matice bilineární formy f , matice kvadratické formy F
E_n	jednotková n -rozměrná čtvercová matice
\mathbf{v}^T, M^T	transponovaný vektor \mathbf{v} , transponovaná matice M
$ M $	determinant čtvercové matice M
$h(M)$	hodnost matice M
\mathcal{K}	kuželosečka
$A \cup B, A \cap B$	sjednocení množin A a B , průnik množin A a B
$A \subseteq B, A \supseteq B$	A je podmnožina množiny B , A je nadmnožina množiny B
$A \oplus B$	přímý součet množin A a B
$a \in A, a \notin A$	prvek a náleží množině A , prvek a nenáleží množině A
\forall	všechna, pro všechna

Seznam příloh

- A** CD s aplikací, návodem k její obsluze a poznámkami
- B** Stručný popis aplikace

A CD s aplikací, návodem k její obsluze a poznámkami

Ve složce „Ovalita“ na CD je možné najít dva soubory:

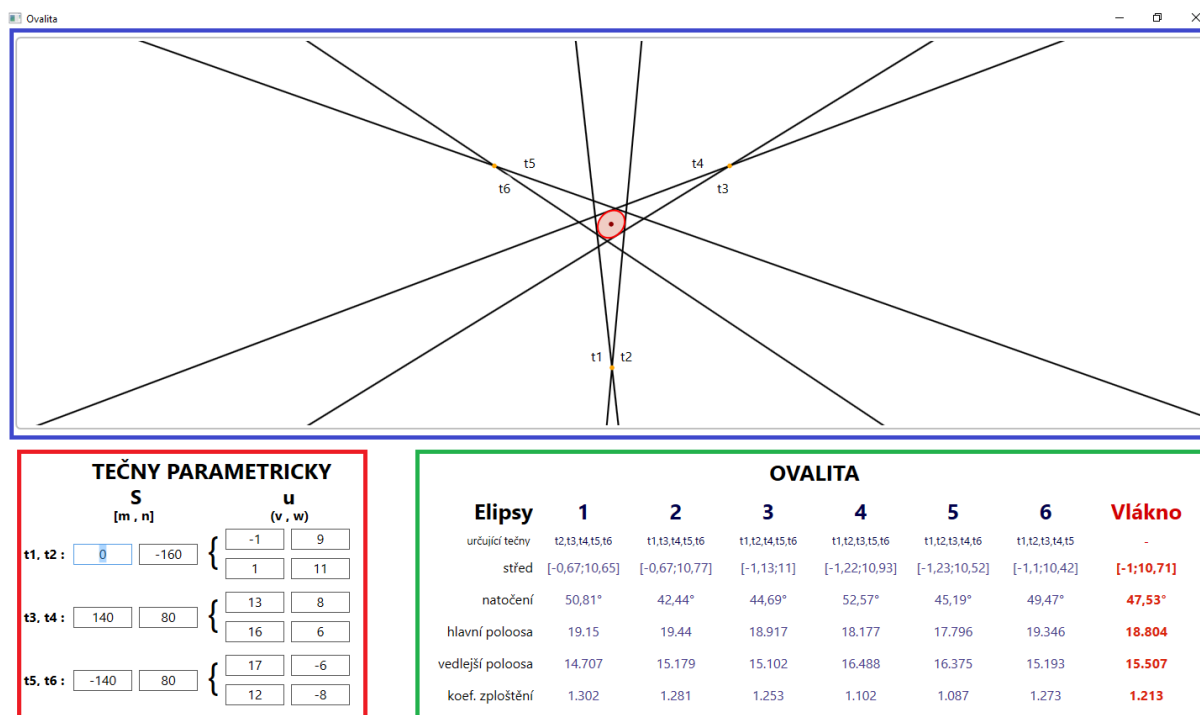
1. aplikace.exe
 - spouští aplikaci modelující princip měření ovality bez nutnosti mít nainstalované Microsoft Visual Studio nebo podobný software
2. readme.pdf
 - obsahuje návod k obsluze aplikace a poznámky

B Stručný popis aplikace

Aplikace byla vytvořena v prostředí Microsoft Visual Studio 2010 a naprogramována v jazyce C#.

Okno aplikace se dá rozdělit na tři části:

- pracovní plocha (červeně)
- displej (modře)
- tabulka s výsledky (zeleně)



- V pracovní ploše se zadává šestice optických tečen t_1, \dots, t_6 v parametrickém tvaru, tj. pomocí souřadnic optických středů kamer S_1, S_2, S_3 a pomocí složek směrových vektorů příslušných přímek.
- Tato soustava přímek a bodů je pak znázorněna na displeji, včetně označení příslušných přímek a zobrazenou aproximací vlákna.
- Vpravo dole je nakonec možné najít tabulku s výsledky, která ukazuje vypočtené charakteristiky pomocných elips a aproximace vlákna.